

## Suavização parcial e algoritmos acelerados de primeira ordem: aplicação a problemas inversos com ruído esparso

Gabriel R. S. Grillo<sup>1</sup>, Sandra A. Santos<sup>2</sup>

IMECC/UNICAMP, Campinas, SP

Elias S. Helou Neto<sup>3</sup>

ICMC/USP, São Carlos, SP

Neste trabalho nos concentramos na solução de problemas inversos lineares na forma  $Ax = \tilde{y}$ , com  $\tilde{y} = y + \delta$ , em que  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  representa a discretização de um operador linear compacto,  $y \in \mathbb{R}^m$  um objeto observável,  $\delta \in \mathbb{R}^m$  o ruído associado à medição de  $y$ , e  $x \in \mathbb{R}^n$  o objeto de interesse. Em particular, nos concentramos nos problemas em que  $A$  é mal condicionada, o que decorre do operador linear compacto que fora discretizado ser mal-posto (veja [1, Capítulo 2]).

Uma vez que  $A$  é mal condicionada e existe ruído na medição de  $y$ , resolver diretamente o sistema linear  $Ax = \tilde{y}$  não produzirá solução confiável. Uma forma de tratar essa dificuldade envolve estratégias de regularização variacional, em que a solução regularizada é dada pela solução do problema de minimização

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(Ax, \tilde{y}) + \alpha g(x), \quad (1)$$

onde  $\varphi(Ax, \tilde{y})$  é o termo de fidelidade aos dados,  $g(x)$  é o termo regularizador e  $\alpha > 0$  é o parâmetro de regularização que controla o balanço entre os dois termos (veja [1, Capítulos 3-5]).

Para que a discretização mantenha boa resolução, é comum que as dimensões  $m$  e  $n$  em (1) sejam altas. Nesse contexto, os métodos de primeira ordem são uma alternativa, visto que suas iterações são baratas e possuem baixos requisitos de memória. Estratégias de aceleração desses métodos permitem reduzir a quantidade total de iterações, atingindo maior precisão.

Um método dessa categoria é o FISTA [2], desenvolvido no escopo de problemas da forma

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + h(x), \quad (2)$$

em que  $f$  é uma função convexa e diferenciável com gradiente Lipschitz contínuo e  $h$  é convexa e possivelmente não suave, mas prox-amigável, i.e., o seu operador proximal é facilmente computável.

Como (1) muitas vezes está na forma do problema (2), o FISTA é um método utilizado para solução de problemas inversos lineares. Por exemplo, o problema de quadrados mínimos esparso, em que  $\varphi(Ax, \tilde{y}) = \|Ax - \tilde{y}\|_2^2$  e  $g(x) = \|Qx\|_1$ , sendo  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  um operador ortonormal esparsificante.

Entretanto, é possível que um dos termos em (1) não seja diferenciável ou prox-amigável, de modo que uma alternativa é substituí-lo por uma aproximação suave. Essa estratégia, de forma mais genérica chamada de suavização parcial associada a métodos de primeira ordem acelerados, é tratada em [3, Seção 10.8].

Uma situação dessa natureza ocorre quando consideramos o problema inverso de *deblur* com ruído esparso. Nele,  $y$  representa a imagem borrada,  $A$  um operador de *blur* apropriado,  $\delta$  um ruído esparso e  $x$  a imagem a ser reconstruída. Para fins de experimentação numérica, consideramos a

---

<sup>1</sup>g216439@dac.unicamp.br

<sup>2</sup>sasantos@unicamp.br

<sup>3</sup>elias@icmc.usp.br



Figura 1: Imagens do problema de *deblur*

imagem teste *cameraman*  $256 \times 256$ , o *blur* com filtro uniforme  $5 \times 5$  e um ruído do tipo *salt and pepper* em cerca de 0.01% dos pixels. A imagem observada nessas condições, obtida após aplicação do *blur* e adição do ruído, é apresentada na Figura 1(a).

Uma possibilidade para resolver problemas de *deblur* é considerar o problema de quadrados mínimos esparso com  $Q$  representando a transformada de Haar de terceiro nível, como em [2, Seção 5], a qual chamaremos de estratégia  $l_2^2-l_1$ . Implementamos o FISTA com *backtracking* ( $s = 1$  e  $\eta = 1.2$  [3, p. 291]) em Matlab e realizamos 500 iterações usando o parâmetro de regularização  $\alpha = 1e-2$  e a imagem observada como ponto inicial. O parâmetro  $\alpha$  foi escolhido resolvendo esse problema para diferentes valores e selecionando aquele cujo resultado mais se aproxima da imagem original. A Figura 1(b) apresenta o resultado, que verificamos ser insatisfatório.

Propomos substituir o termo de fidelidade aos dados por  $\varphi(Ax, \tilde{y}) = \|Ax - \tilde{y}\|_1$ , o que chamaremos de estratégia  $l_1-l_1$ . Como esse termo não é diferenciável nem prox-amigável, propomos a sua suavização por meio da função de Huber [3, Exemplo 6.59]. Com a mesma implementação do FISTA e usando os parâmetros de suavização  $\mu = 1e-3$  e regularização  $\alpha = 1e-3$ , o resultado com 500 iterações é apresentado na Figura 1(c), que verificamos ser satisfatório. A escolha de  $\mu$  considerou o balanço entre boa aproximação e a obtenção de uma constante de Lipschitz que não seja proibitivamente alta. A escolha de  $\alpha$  foi análoga à descrita anteriormente.

Portanto, o uso do termo de fidelidade aos dados apropriado às características do problema é fundamental. Como apresentado, no caso de ruído esparso, a norma  $l_1$  se mostra uma boa alternativa. Apesar desse termo não ser suave, é possível se valer da regularização variacional, usando a estratégia de suavização parcial associada a métodos de primeira ordem acelerados.

## Agradecimentos

Projeto desenvolvido com financiamento FAPESP (2022/10506-8 e 2018/24293-0) e CNPq (308004/2022-1 e 305010/2020-4).

## Referências

- [1] Heinz Werner Engl, Martin Hanke e Andreas Neubauer. **Regularization of Inverse Problems**. Dordrecht: Springer Science & Business Media, 1996.
- [2] Amir Beck e Marc Teboulle. “A Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm for Linear Inverse Problems”. Em: **SIAM Journal on Imaging Sciences** 2.1 (2009), pp. 183–202.
- [3] Amir Beck. **First-Order Methods in Optimization**. Philadelphia: SIAM, 2017.