

Estudos de Modelos Dispersivos para Dinâmica de Populações

William M. S. Yamashita¹, Lucy T. Takahashi², Grigori Chapiro²

¹Modelagem Computacional, ²Departamento de Matemática, UFJF,
36036-330, Campus Universitário, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, MG
E-mail: wmsyamashita@hotmail.com, ltiemi@gmail.com, grigori@ice.ufjf.br.

Resumo: *Nas últimas décadas, a incidência global da dengue tem crescido dramaticamente favorecida pelo aumento da mobilidade humana e da urbanização. O estudo da população do mosquito é de grande importância para a saúde pública em países como o Brasil, onde as condições climáticas e ambientais são favoráveis para a propagação desta doença. Este trabalho baseia-se no estudo de modelos matemáticos que tratam do ciclo de vida do mosquito da dengue usando equações diferenciais parciais. Estudamos a existência de solução na forma de onda viajante, usando um método semi-analítico combinando técnicas de Sistemas Dinâmicos, como a seção de Poincaré e análise local com base no Teorema de Hartman-Grobman, e integração numérica.*

Palavras-chave: *Equações Diferenciais Parciais, Onda Viajante, Leis de Conservação, Dengue*

Problema: Atualmente, mais de 2,5 bilhões de pessoas no mundo vivem em risco da dengue, não só nas regiões tropicais, mas também, atingindo climas temperados. O *Aedes aegypti* se prolifera em estreita proximidade com as comunidades humanas usando armazenamentos artificiais de água tais como tanques, tambores, baldes, vasos de flores, etc., como locais de reprodução [2].

No sentido de epidemias, Hay [3] relata uma possível epidemia de dengue no Brasil em 2014 que sediará a 20ª Copa do Mundo FIFA de futebol. Ele avalia os potenciais níveis de exposição através da análise de mapas de distribuição da dengue no Brasil e os registros de sua variação sazonal nas cidades-sede.

Existem várias abordagens sobre a invasão e busca de controle da dengue. O trabalho de Dufourd e Dumont [1] tem por objetivo desenvolver um modelo matemático para simular a dispersão do mosquito *Aedes albopictus* e seu controle levando em conta os parâmetros ambientais (vento, temperatura, localização). Os autores usam ferramentas de controle biológico, como a Técnica do Inseto Estéril que consiste na introdução de um grande número de insetos estéreis. Eles fazem simulações numéricas para a dispersão do mosquito e testam diferentes cenários para o controle da doença.

Uma solução de uma equação diferencial parcial (EDP) que pode ser escrita na forma $u(\xi)$ é chamada solução na forma de uma onda viajante, onde a variável $\xi = x - ct$ é dita variável viajante e c (constante) é a velocidade de propagação. Utilizaremos este tipo de solução neste trabalho, que transforma uma EDP em uma equação diferencial ordinária (EDO). Assim, encontrar a solução da EDO na forma de uma onda viajante equivale a encontrar a solução da EDP correspondente.

Com esta forma de solução, destacamos o trabalho de Maidana e Yang [5] que determinam a existência de soluções em forma de ondas viajantes, em processos de invasão do mosquito *Aedes aegypti*. Os autores propuseram um modelo matemático baseado na difusão espacial da dengue por meio de um sistema de EDP de Reação e Difusão, relacionando as populações humanas e de mosquitos. A taxa de disseminação da doença é determinada pela aplicação das soluções de ondas viajantes para o sistema correspondente de EDP.

Formulação do problema: Passamos agora, para a descrição do ciclo de vida do mosquito da dengue. Focando nossa atenção numa escala espacial urbana onde um processo (local) de difusão

é devido a um movimento de busca autônomo e aleatório da fêmea alada do *Aedes aegypti* e é acoplado com uma constante de advecção que pode ser interpretada como um resultado de transporte pelo vento. Faremos nossa análise para o caso unidimensional [9].

Para simplificar a dinâmica biológica vital do mosquito, o modelo proposto em [9] considera somente duas subpopulações, a forma alada e móvel (mosquitos adultos fêmeas) e uma população aquática e estática, na qual incluem as formas ovo, larva e pupa. Considere o seguinte esquema compartimental baseado no processo de desenvolvimento do mosquito

$$\begin{array}{ccccccc}
 M & \xrightarrow{r} & O \text{ (Ovo)} & \xrightarrow{\gamma_0} & L \text{ (Larva)} & \xrightarrow{\gamma_1} & P \text{ (Pupa)} & \xrightarrow{\gamma_2} & M \text{ (Adulto)}, \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \mu_0 & & \mu_1 & & \mu_2 & & \mu_3
 \end{array} \tag{1}$$

onde $O(x, t)$, $L(x, t)$, $P(x, t)$ e $M(x, t)$ são as densidades de ovos, larvas, pupas e mosquitos fêmeas aladas, respectivamente. Em cada uma destas fases existe uma taxa μ_i , $i = 0, 1, 2, 3$, de mortalidade, uma taxa γ_i de passagem da fase i para a fase $i + 1$, $i = 0, 1, 2$, e uma taxa r de oviposição. Consideramos que o *Aedes aegypti* possui duas fases: ovo, larva e pupa compõem a fase aquática e estática ($\bar{A}(x, t)$), e mosquitos fêmeas a sua fase alada e móvel ($\bar{M}(x, t)$).

Começando com um modelo simples, os autores de [9] descrevem um modelo para a dinâmica espacial da população de *Aedes aegypti*. Assim, tem-se

- $\bar{\mu}_i$ - taxa de mortalidade ($i = 1$ da fase alada e $i = 2$ da fase aquática);
- \bar{k}_i - é a capacidade suporte de cada fase;
- $\bar{\gamma}$ - taxa de maturação da forma aquática para a forma alada dos mosquitos fêmeas;
- \bar{r} - taxa de oviposição pelos mosquitos fêmeas;
- $\bar{\gamma}\bar{A}(x, t)\left(1 - \frac{\bar{M}(x, t)}{\bar{k}_1}\right)$ - termo de Verhulst o qual descreve uma capacidade suporte \bar{k}_1 relacionada a quantidade de sangue disponível;
- $\bar{r}\bar{M}(x, t)\left(1 - \frac{\bar{A}(x, t)}{\bar{k}_2}\right)$ - taxa de oviposição é proporcional a sua densidade que é regulada pelo efeito da capacidade suporte sobre a ocupação dos criadouros viáveis.

Considera-se que a dispersão do mosquito da dengue como sendo um resultado de um movimento aleatório (e local) do vôo, representado macroscopicamente pelo processo de difusão \bar{D} , acoplado a uma advecção causada pelo vento e um fluxo com velocidade constante $\bar{\nu}$. Em [9] propõem-se o seguinte modelo

$$\begin{cases} \bar{M}_t &= \bar{D}\bar{M}_{xx} - (\bar{\nu}\bar{M})_x + \bar{\gamma}\bar{A}\left(1 - \frac{\bar{M}}{\bar{k}_1}\right) - \bar{\mu}_1\bar{M} \\ \bar{A}_t &= \bar{r}\left(1 - \frac{\bar{A}}{\bar{k}_2}\right)\bar{M} - (\bar{\mu}_2 + \bar{\gamma})\bar{A}. \end{cases} \tag{2}$$

Após introduzir a escala apropriada, adimensionaliza-se o sistema acima e obtém-se

$$\begin{cases} M_t &= M_{xx} - \nu M_x + \frac{\gamma}{k}A(1 - M) - \mu_1 M \\ A_t &= k(1 - A)M - (\mu_2 + \gamma)A, \end{cases} \tag{3}$$

onde M e A são as densidades adimensionalizadas da população alada e da população aquática, respectivamente, e ν , γ , k , μ_1 , μ_2 são os parâmetros adimensionais.

Após descrever o modelo, os autores de [9] buscam formas para encontrar soluções para o problema, levando em conta o sentido biológico da solução. Como não foi possível encontrar a solução clássica, eles analisaram um exemplo numérico. Estudam a solução em forma de ondas viajantes, ver Figura 1. Buscam a solução das EDO pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem e validam essa solução resolvendo numericamente as EDP, usando o método de Crank-Nicolson.

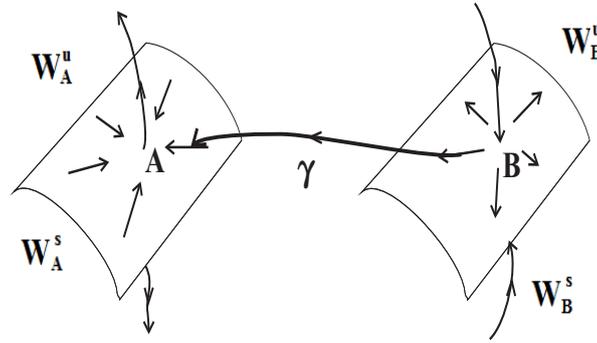


Figura 1: Órbita heteroclínica (γ), onde W_i^s e W_i^u são as variedades estável e instável, respectivamente, em A e B.

Em [2], o modelo acima é generalizado. Os autores modificam as equações de [9] para ter uma melhor descrição dos fenômenos de difusão e advecção. Uma possível justificativa seria o quanto a nuvem de mosquitos está influenciando na propagação da epidemia. Nós iremos trabalhar com o modelo de [2] modificado. Utilizando a mesma notação que no Modelo (3), temos que

$$\begin{cases} M_t = M_{xx} - 2\nu M^q M_x + \frac{\gamma}{k} A(1 - M) - \mu_1 M \\ A_t = k(1 - A)M - (\mu_2 + \gamma)A \end{cases} \quad (4)$$

onde $q > 0$ e os parâmetros são os mesmos do Modelo (3).

Método: Os trabalhos citados carecem de detalhes na demonstração da existência de solução, este será o nosso objetivo neste trabalho. Estudaremos soluções na forma de ondas viajantes no Sistema (4). As soluções em forma de ondas viajantes podem ser escritas como

$$M(x, t) = m(\xi) \quad \text{e} \quad A(x, t) = a(\xi) \quad (5)$$

onde $\xi = x - ct$, c é uma velocidade constante, $m(\xi)$ e $a(\xi)$ são os perfis de onda. Olhamos para os perfis que levam à interpretação de uma invasão, tais que

$$\begin{cases} \lim_{\xi \rightarrow -\infty} m(\xi) = m^- \quad \text{e} \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} m(\xi) = 0, \\ \lim_{\xi \rightarrow -\infty} a(\xi) = a^- \quad \text{e} \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} a(\xi) = 0, \end{cases} \quad (6)$$

onde m^- e a^- são os limites das populações.

De (5), temos que

$$M_t = -cm'(\xi), \quad M_x = m'(\xi), \quad M_{xx} = m''(\xi) \quad \text{e} \quad A_t = -ca'(\xi), \quad (7)$$

onde $m' = dm/d\xi$ e $a' = da/d\xi$. Substituindo (7) no Sistema (4) e reescrevendo o sistema na forma de um sistema de 1ª ordem, obtemos

$$\begin{cases} m'(\xi) = h(\xi) \\ h'(\xi) = (2\nu m^q(\xi) - c)h(\xi) + \left(\mu_1 + \frac{\gamma}{k} a(\xi)\right)m(\xi) - \frac{\gamma}{k} a(\xi) \\ a'(\xi) = \frac{k}{c}(a(\xi) - 1)m(\xi) + \left(\frac{\mu_2 + \gamma}{c}\right)a(\xi), \end{cases} \quad (8)$$

com as equivalentes condições de contorno de (6)

$$\begin{cases} \lim_{\xi \rightarrow -\infty} m(\xi) = m^- \quad \text{e} \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} m(\xi) = 0, \\ \lim_{\xi \rightarrow -\infty} h(\xi) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} h(\xi) = 0, \\ \lim_{\xi \rightarrow -\infty} a(\xi) = a^- \quad \text{e} \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} a(\xi) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Buscamos os pontos singulares do Sistema (8), que são obtidos resolvendo o sistema homogêneo $(m', h', a') = (0, 0, 0)$. Neste sistema, tomando o limite quando $\xi \rightarrow -\infty$ e usando (9), obtemos

$$\begin{cases} \gamma(m^- - 1)a^- + k\mu_1 m^- = 0 \\ k(a^- - 1)m^- + (\mu_2 + \gamma)a^- = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Resolvendo este sistema, obtemos os pontos singulares $A = (0, 0, 0)$ e $B = (m^-, 0, a^-)$, onde

$$a^- = \frac{k(\gamma - \mu_1\mu_2 - \gamma\mu_1)}{\gamma(k + \mu_2 + \gamma)} \quad \text{e} \quad m^- = \frac{\gamma - \mu_1(\mu_2 + \gamma)}{\gamma + k\mu_1}. \quad (11)$$

Estudamos a estabilidade do fluxo do Sistema (8) na vizinhança dos equilíbrios, com base no Teorema Hartman-Grobman [7]. Consideramos $F(m, h, a) = m'$, $G(m, h, a) = h'$ e $H(m, h, a) = a'$ e calculamos a matriz Jacobiana (J) do Fluxo (8). Assim, para o ponto singular $A = (0, 0, 0)$, obtemos

$$J(A) = J(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \mu_1 & -c & -\frac{\gamma}{k} \\ -\frac{k}{c} & 0 & \frac{\mu_2 + \gamma}{c} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Agora, para o ponto singular $B = (m^-, 0, a^-)$, onde m^- e a^- são dados em (11), obtemos

$$J(B) = J(m^-, 0, a^-) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \mu_1 + \frac{\gamma}{k}a^- & 2\nu(m^-)^q - c & \frac{\gamma}{k}(m^- - 1) \\ \frac{k}{c}(a^- - 1) & 0 & \frac{km^- + \mu_2 + \gamma}{c} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Para $J(A)$ e $J(B)$, determinaremos os autovalores (λ_i) e autovetores (w_i) correspondentes, assim, definiremos quem estará na variedade estável ($Real(\lambda_i) < 0$) e na variedade instável ($Real(\lambda_i) > 0$).

Resultado 1: Existência de solução na forma de onda viajante. Em [9], foram utilizados os seguintes parâmetros $\nu = 8,164 \times 10^{-2}$, $\gamma = 6,66 \times 10^{-3}$, $k = 2,5 \times 10^{-1}$, $\mu_1 = 1,33 \times 10^{-3}$, $\mu_2 = 3,33 \times 10^{-4}$. Seguiremos os mesmos valores e consideraremos $q = 1$ e $c = 0,52$.

Descreveremos, agora, o método semi-analítico que utilizamos para estudar a existência de solução do Problema (4) que foi transformado no Sistema (8) com Condições Iniciais (9). Este método foi inspirado em [6] empenhando técnicas de sistemas dinâmicos, como a seção de Poincaré, e integração numérica no Matlab, ver a Figura 2.

- Os pontos singulares, calculados em (10) e (11), são: $A = (0, 0, 0)$ e $B = (0, 951; 0; 0, 971)$.
- Da matriz Jacobiana em cada ponto singular (Matrizes (12) e (13)), determinamos os autovalores e autovetores correspondentes. Assim, encontramos os seguintes valores
 - para $J(A)$ temos os seguintes autovalores negativos $\lambda_1 = -0,188$, $\lambda_2 = -0,465$ com os respectivos autovetores $w_1 = (0, 623; -0, 117; 1, 490)$, $w_2 = (-2, 826; 1, 315; -2, 838)$ que definem a variedade estável;
 - para $J(B)$ temos os seguintes autovalores positivos $\lambda_3 = 0,063$, $\lambda_4 = 0,471$ com os respectivos autovetores $w_3 = (0, 997; 0, 063; 0, 034)$, $w_4 = (0, 004; 0, 002; 1, 001)$ que definem a variedade instável.
- Criamos o Plano de Poincaré (π) com o ponto $C = (A + B)/2 = (0, 4755; 0; 0, 4855)$ e o vetor normal $N = \overrightarrow{CB} = (0, 4755; 0; 0, 4855)$, de modo que o plano corte as variedades transversalmente.
- Obtemos a interseção entre variedades com o plano de Poincaré. A Figura 2 representa este método.

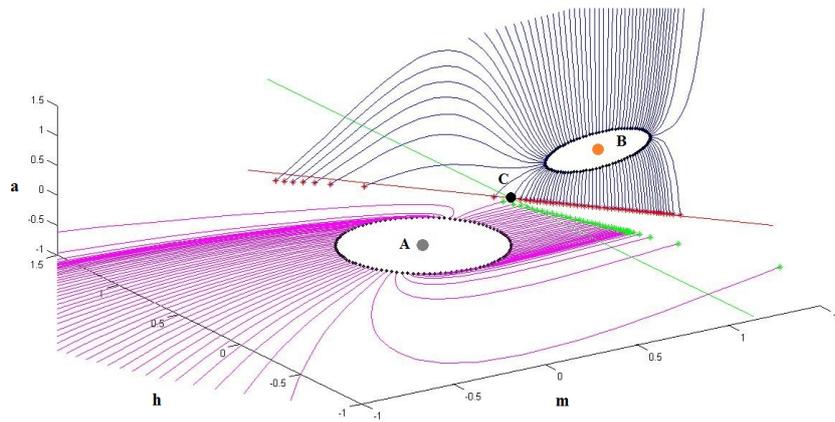


Figura 2: Os equilíbrios A (cinza), B (laranja) e o ponto médio C (preto). As variedades estável em A (linhas rosas) e a instável em B (linhas azuis) interceptam o plano de Poincaré (linhas vermelha e verde) indicado pelos pontos verdes e vermelhos.

A Figura 3 representa o plano de Poincaré (π), indicando as interseções das variedades estável em A (pontos verdes) e instável em B (pontos vermelhos). Encontramos uma interseção entre as curvas no plano π (o ponto preto P), isto é, existe uma órbita que parte do equilíbrio B (na variedade instável), intercepte π e ligue ao outro equilíbrio A (na variedade estável). Assim, existe uma órbita heteroclínica que ligue o equilíbrio B até o equilíbrio A , ou seja, garantimos que existe uma solução em forma de onda viajante para o modelo.

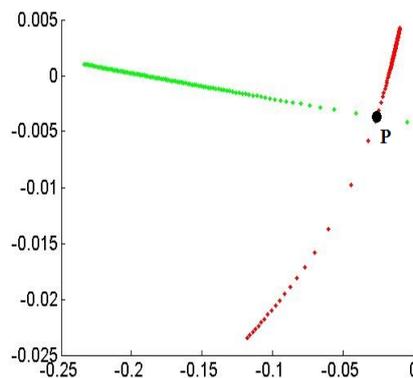


Figura 3: Plano de Poincaré da Figura 2 no qual estão indicadas as interseções com as variedades estável de A (pontos verdes) e instável de B (pontos vermelhos). O ponto P representa a interseção entre as variedades.

Resultado 2: Solução para modelo simplificado do Sistema (4). Utilizaremos os conceitos de Leis de Conservação para mostrar outras formas de ondas e daremos uma solução para modelo simplificado do Sistema (4). Nesta análise, iremos considerar nulos os termos fontes ($\phi(M, A) = (\gamma/k)A(1 - M) - \mu_1 M$, $\psi(M, A) = k(1 - A)M - (\mu_2 + \gamma)A$) e a difusão (M_{xx}). Assim, obtemos o seguinte sistema na forma de Leis de Conservação ($M_t + f(M)_x = 0$) e uma EDO, isto é

$$\begin{cases} M_t + 2\nu M^q M_x = 0 \\ A_t = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Resolvemos a 1ª Equação de (14), temos o seguinte problema

$$\begin{cases} M_t + 2\nu M^q M_x = 0 \\ M(x, 0) = \begin{cases} m_l, & \text{se } x < 0, \\ m_r, & \text{se } x > 0, \end{cases} \end{cases} \quad (15)$$

onde m_l e m_r são estados a esquerda e a direita, respectivamente, e o fluxo é $f'(M) = 2\nu M^q$. Da 2ª Equação de (14), temos que $A_t(x, t) = 0$, logo, $A(x, t) = g_1(x) + c_1$, onde g_1 é uma função e c_1 uma constante.

Em (15), iremos analisar dois casos, onde utilizaremos o métodos das curvas características para encontrar as soluções.

Caso 1: Seja $-\infty < m_r < m_l < \infty$ e $q > 0$. Pelo método das características, obtemos

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f'(M) = 2\nu M^q \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (16)$$

Desta forma, as curvas características são

$$x_s(t) = \begin{cases} f'(m_l)t + x_0 = 2\nu m_l^q t + x_0, & \text{se } x_0 < 0 \\ f'(m_r)t + x_0 = 2\nu m_r^q t + x_0, & \text{se } x_0 > 0. \end{cases} \quad (17)$$

Pela condição Rankine-Hugoniot [4], temos que

$$s = \frac{f(m_l) - f(m_r)}{m_l - m_r} = \frac{2\nu}{q+1} \left(\frac{m_l^{q+1} - m_r^{q+1}}{m_l - m_r} \right) = \frac{2\nu}{q+1} \left(\sum_{i=0}^q m_l^{q-i} m_r^i \right). \quad (18)$$

Essa é a velocidade do choque. Observamos que a 1ª Equação de (15) cumpre a Condição de Entropia de Oleinik [4], pois como $m_r < m_l$ e $\nu > 0$, temos que

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=0}^q m_l^{q-i} M^i \right) \geq \left(\sum_{i=0}^q m_l^{q-i} m_r^i \right) \geq \left(\sum_{i=0}^q M^{q-i} m_r^i \right) \\ \Leftrightarrow & \frac{2\nu}{q+1} \left(\frac{M^{q+1} - m_l^{q+1}}{M - m_l} \right) \geq \frac{2\nu}{q+1} \left(\sum_{i=0}^q m_l^{q-i} m_r^i \right) \geq \frac{2\nu}{q+1} \left(\frac{M^{q+1} - m_r^{q+1}}{M - m_r} \right) \\ \Leftrightarrow & \frac{f(M) - f(m_l)}{M - m_l} \geq s \geq \frac{f(M) - f(m_r)}{M - m_r}, \end{aligned}$$

para todo M entre m_r e m_l . Logo, a solução será em forma de choque.

Portanto, a solução do Problema (14) é

$$\begin{cases} M(x, t) = \begin{cases} m_l, & \text{se } x < st, \\ m_r, & \text{se } x > st, \end{cases} \\ A(x, t) = g_1(x) + c_1. \end{cases} \quad (19)$$

Supondo que a solução do Modelo (4) se comporta como em (19), na condição $-\infty < m_r < m_l < \infty$. Assim, na solução teremos uma onda de choque seguida de uma onda viajante. A Figura 4 (a) representa esta sequência de ondas.

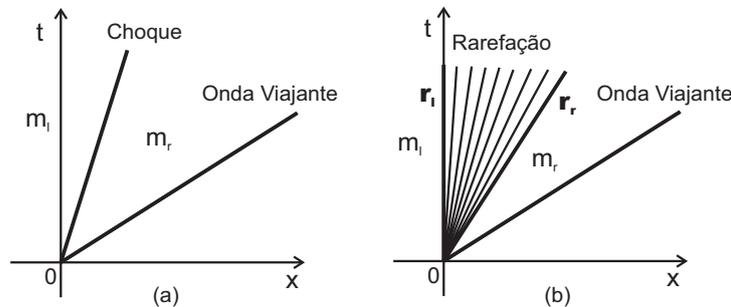


Figura 4: (a) A solução particular do Problema (4), em que $q = 1$, $m_l = m^-$ e $m_r = 0$, é composta por uma onda de choque e por uma onda viajante. (b) A solução particular do problema (4), em que $q = 1$, $m_l = 0$ e $m_r = m^-$, é composta por uma por uma onda de rarefação e por uma onda viajante.

Caso 2: Seja $-\infty < m_l < m_r < \infty$ e $q > 0$. Buscaremos agora, a solução na forma de um onda de rarefação. As curvas características são as mesmas de (17). Sejam $M(x, t) = r(\eta)$, onde $\eta = x/t$. Logo, $M_t(x, t) = r'(\eta) \frac{d\eta}{dt}$ e $M_x(x, t) = r'(\eta) \frac{d\eta}{dx}$.

A solução será na forma de onda de rarefação [8], isto é

$$r(\eta) = \begin{cases} m_l, & \text{se } \eta \leq f'(m_l), \\ (f')^{-1}(\eta), & \text{se } f'(m_l) < \eta < f'(m_r), \\ m_r, & \text{se } \eta \geq f'(m_r). \end{cases}$$

Substituindo na 1ª equação de (15) e resolvendo, obtemos $r(\eta) = \sqrt[q]{\frac{\eta}{2\nu}}$, se $f'(m_l) < \eta < f'(m_r)$.

Portanto, retornando a notação inicial, onde $\eta = x/t$, e fazendo $r_l = f'(m_l)t$ e $r_r = f'(m_r)t$, a solução do Problema (14) para $-\infty < m_l < m_r < \infty$ é

$$\begin{cases} M(x, t) = \begin{cases} m_l, & \text{se } x \leq r_l, \\ \sqrt[q]{\frac{x}{2\nu t}}, & \text{se } r_l < x < r_r, \\ m_r, & \text{se } x \geq r_r, \end{cases} \\ A(x, t) = g_1(x) + c_1. \end{cases} \quad (20)$$

Supondo que a solução do Modelo (4) se comporta como em (20), na condição $-\infty < m_l < m_r < \infty$. Assim, teremos na sua solução uma onda de rarefação seguida de uma onda viajante. A Figura 4 (b) representa esta sequência de ondas.

Conclusões: Analisamos o modelo difusivo do *Aedes aegypti* baseado em [2], onde a existência de solução não foi estudada. Com este objetivo, estudamos e verificamos a existência de solução na forma de onda viajante. Estudamos também a solução particular do Problema (4), onde temos duas possibilidades de soluções dependendo das condições iniciais.

Referências

- [1] C. Dufourd, Y. Dumont, Impact of environmental factors on mosquito dispersal in the prospect of sterile insect technique control, *Computers & Mathematics with Applications*, 66(9), 1695-1715, 2013.
- [2] I.L. Freire, M. Torrisi, Symmetry methods in mathematical modeling of *Aedes aegypti* dispersal dynamics, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 14(3), 1300-1307, 2013.
- [3] S. Hay, Football fever could be a dose of dengue, *Nature*, 503(7477), 439-439, 2013.
- [4] R.J. LeVeque, "Numerical methods for conservation laws", Birkhäuser Verlag, 1992.
- [5] N.A. Maidana, H. Mo Yang, Describing the geographic spread of dengue disease by traveling waves, *Mathematical biosciences*, 215(1), 64-77, 2008.
- [6] A.A. Mailybaev, D. Marchesin, M.H.D.S. Vera, Sensitivity analysis of stable and unstable manifolds: Theory and application, *Preprint, IMPA*, 2001.
- [7] J. Sotomayor, "Lições de equações diferenciais ordinárias", Projecto Euclides, IMPA, 1979.
- [8] C.J. van Duijn, "An introduction to conservation laws: theory and applications to multi-phase flow", Lecture notes, Delft University of Technology, 2000.
- [9] L.T. Takahashi, "Modelos matemáticos de epidemiologia com vetores: simulação da propagação urbana e geográfica da dengue", Tese de Doutorado, IMECC-Unicamp, 2004.