Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Diferenças entre números fuzzy

Laécio Carvalho de Barros, Francielle Santo Pedro
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, IMECC, UNICAMP,
13083-970, Campinas, SP
E-mail: laeciocb@ime.unicamp.br, fran.stopedro@gmail.com

Luciana Takata Gomes
Departamento de Física, Química e Matemática, UFSCar, 18052-780, Sorocaba, SP
E-mail: lucianatakata@ufscar.br

Resumo: *Apresentamos diversas definições de diferenças entre números fuzzy presentes na literatura: tradicional, Hukuhara, generalizada de Hukuhara, generalizada, CIA e via distribuições. Exemplificamos através de um problema de transmissão direta e comparamos as diferentes abordagens.*

Palavras-chave: *Diferenças, números fuzzy.*

1 Introdução

A diferença tradicional entre números fuzzy, baseada na diferença entre intervalos (ou, equivalentemente, definida via extensão de Zadeh) [1], leva em conta todas as possíveis combinações de elementos entre os dois conjuntos. Como resultado, a resposta é sempre maior em termos de diâmetro do que qualquer um dos conjuntos envolvidos na operação. Assim, a diferença entre dois números não-crisp é sempre um número não crisp e subtrair um número não-crisp dele mesmo nunca é o número zero.

O resultado da subtração de um número não-crisp A dele mesmo utilizando a diferença de Hukuhara ($A \ominus_H A$) [7], por sua vez, é o número zero. Porém, entre dois números fuzzy distintos A e B ela só está definida quando o primeiro termo possui diâmetro no mínimo igual ao segundo. Generalizando a ideia dessa diferença, [8, 9] propuseram a diferença generalizada de Hukuhara, que também possui a propriedade $A - A = 0$ mas está definida para uma classe maior de pares de números fuzzy. Outra generalização é a diferença generalizada [2, 9], que possui os mesmos resultados que a generalizada de Hukuhara, quando esta existe, mas que está definida para mais pares de números fuzzy.

Outra proposta é a CIA (constraint interval arithmetic) [6], que admite uma espécie de interação entre os dois números fuzzy envolvidos na subtração. Também levando em contas as interações, é possível definir subtrações entre números fuzzy utilizando a distribuição conjunta de possibilidade (ou pertinência) entre os números fuzzy operados [4].

Neste trabalho apresentamos as definições de todas as diferenças citadas e analisamos suas relações e apresentamos um exemplo ilustrativo.

2 Conceitos básicos

Nessa seção apresentamos alguns conceitos básicos e notação utilizados.

Definição 2.1. *Um subconjunto fuzzy A de U é caracterizado por uma função de pertinência $\mu_A : U \longrightarrow [0, 1]$.*

Como um conjunto clássico é definido por sua função característica cujo contradomínio é $\{0,1\}$, podemos dizer então que um conjunto clássico é um caso particular de um conjunto fuzzy. Denotamos por $\mathcal{F}(U)$ a família de todos os subconjuntos fuzzy de U.

U será um espaço topológico, a partir de agora.

Definição 2.2. *Seja A um subconjunto fuzzy de U e $\alpha \in [0,1]$. O α-nível de A é o subconjunto clássico de U que é definido por*

$$[A]_\alpha = \{x \in U : \mu_A(x) \geq \alpha\} \textit{ para } 0 < \alpha \leq 1.$$

O nível zero de um conjunto fuzzy A de U é definido como o menor conjunto fechado que contém o suporte do conjunto fuzzy A, isto é, $[A]_0 = \overline{\{x \in U : \mu_A(x) > 0\}}$.

A família de todos os subconnjuntos fuzzy de U cujos α-níveis são não-vazios, compactos e convexos será denotada por $\mathcal{F}_\mathcal{C}(U)$.

Definição 2.3. *Um subconjunto fuzzy A é dito ser um número fuzzy quando o conjunto universo no qual μ_A esta definida, é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ e satisfaz:*

i. todos os α-níveis de A são intervalos fechados e não vazios de $\mathbb{R}$;

ii. $\{x \in U : \mu_A(x) > 0\}$ é um conjunto limitado.

A família dos números fuzzy coincide com $\mathcal{F}_\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Definição 2.4. *Uma t-norma T é qualquer operação binária $T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ que possui as seguintes propriedades:*

1. *elemento neutro: $1Tx = x$;*
2. *comutativa: $xTy = yTx$;*
3. *associativa: $xT(yTz) = (xTy)Tz$;*
4. *monotonicidade: se $x \leq u$ e $y \leq v$, então $xTy \leq uTv$.*

O princípio de extensão de Zadeh é uma importante ferramenta amplamente empregada para estender funções com valores únicos para funções com valores em conjuntos fuzzy. A definição a seguir é uma definição mais geral, que tem a extensão de Zadeh como caso particular quando a t-norma é a do mínimo.

Definição 2.5. *(Princípio de extensão sup-T) Sejam f uma função tal que $f : U \times V \to Z$ e, A e B subconjuntos fuzzy de U e V, respectivamente. Uma extensão de f via T é a função $\widehat{f}$ que, aplicada a A e B, fornece o subconjunto fuzzy $\widehat{f}(A,B)$ de Z, cuja função de pertinência é dada como segue*

$$\mu_{\widehat{f}(A,B)}(z) = \begin{cases} \sup\limits_{f^{-1}(z)} T(\mu_A(u), \mu_B(v)) & \textit{se} \quad f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ \\ 0 & \textit{se} \quad f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases},$$

sendo $f^{-1}(z) = \{(u,v) : f(u,v) = z\}$ denomina-se pré-imagem de z.

Os conceitos a seguir são provenientes da teoria de possibilidades e serão utilizados para definir diferença interativa entre números fuzzy.

Definição 2.6. *Uma distribuição de possibilidade sobre $\Omega \neq \phi$ é uma função $\mu : \Omega \longrightarrow [0,1]$ que satisfaz $\sup\limits_{\omega \in \Omega} \mu(\omega) = 1$.*

Definição 2.7. *Sejam A e B números fuzzy e $C \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^2)$, então μ_C é uma distribuição de possibilidade conjunta de A e B se*

$$\max_{y\in\mathbb{R}} \mu_C(x,y) = \mu_A(x) \quad e \quad \max_{x\in\mathbb{R}} \mu_C(x,y) = \mu_B(y).$$

Além disso, μ_A e μ_B são chamadas distribuições marginais de C.

A Definição 2.5 pode ser estendida para casos mais gerais considerando-se distribuições de possibilidade conjuntas, das quais as t-normas são casos particulares.

Definição 2.8. *Seja C uma distribuição de possibilidade conjunta com distribuições de possibilidades marginais μ_A e μ_B, e seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se A e B são números fuzzy completamente correlacionados, então a extensão de f via C é a função f_C cuja função de pertinência é dada por*

$$\mu_{f_C(A,B)}(z) = \begin{cases} \sup\limits_{y=f(x,y)} \mu_C(x,y) & se \quad f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ \\ 0 & se \quad f^{-1}(z) = \emptyset, \end{cases}$$

sendo $f^{-1}(z) = \{(x,y) : f(x,y) = z\}$.

Teorema 2.9. *[3] Sejam $A, B \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ números fuzzy completamente correlacionados, seja C sua distribuição de possibilidade conjunta e $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma função contínua. Então,*

$$[f_C(A,B)]_\alpha = f([C]_\alpha).$$

Definição 2.10. *Dois números fuzzy A e B são declarados completamente correlacionados se existem $q, r \in \mathbb{R}$, com $q \neq 0$, tais que sua distribuição de possibilidade conjunta é definida por*

$$\mu_C(x,y) = \mu_A(x)\mathcal{X}_{\{qx+r=y\}}(x,y) = \mu_B(y)\mathcal{X}_{\{qx+r=y\}}(x,y) \tag{1}$$

sendo que $\mathcal{X}_{\{qx+r=y\}}(x,y)$ é a função característica da reta $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : qx + r = y\}$.

3 Diferenças entre números fuzzy

A seguir apresentamos diversas maneiras presentes na literatura de realizar a diferença entre dois números fuzzy.

Definição 3.1. *Suponha A e B dois números fuzzy de $\mathbb{R}$. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido como $f(x,y) = x - y$, isto é, o operador subtração. A diferença tradicional entre dois números fuzzy é o número fuzzy $f(A,B) = A - B$, cuja função de pertinência é dada por*

$$\mu_{(A-B)}(z) = \begin{cases} \sup\limits_{\phi(z)} \min\left[\mu_A(x), \mu_B(y)\right] & se \quad \phi(z) \neq \emptyset \\ \qquad 0 & se \quad \phi(z) = \emptyset \end{cases}, \tag{2}$$

sendo $\phi(z) = \{(x,y) : x - y = z\}$.

Proposição 3.2. *Sejam A, B números fuzzy com α-níveis dados, respectivamente, por $[a^-_\alpha, a^+_\alpha]$ e $[b^-_\alpha, b^+_\alpha]$. Então a diferença tradicional entre dois números fuzzy A e B é o número fuzzy $A-B$ cujos α-níveis são dados por*

$$[A - B]_\alpha = [a^-_\alpha - b^+_\alpha, a^+_\alpha - b^-_\alpha].$$

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0067

Definição 3.3. *Sejam A, B números fuzzy e $f(x,y) = x - y$ o operador subtração, então a extensão* $\sup -T$ *do número fuzzy $A - B$ é obtida pela seguinte função de pertinência*

$$\mu_{A-B}(z) = \sup_{x-y} T(\mu_A(x), \mu_B(y)), z \in \mathbb{R}.$$

Observação 3.4. Se na Definição 3.3 a t-norma utilizada for o mínimo, a diferença resultante é a mesma que a diferença tradicional.

Assim como a Definição 2.8 de extensão via distribuição conjunta generaliza o conceito de extensão via t-norma que por sua vez generaliza a extensão de Zadeh (que é o caso particular em que a distribuição é dada pelo mínimo), a definição de diferença via extensão com a t-norma do mínimo pode ser generalizada pela diferença com t-normas mais gerais que por sua vez são casos particulares de distribuições conjuntas. A seguir definimos esta última diferença.

Definição 3.5. *Suponha A e B dois números fuzzy de $\mathbb{R}$. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x - y$, isto é, o operador subtração. A diferença via distribuição conjunta C entre dois números fuzzy é o número fuzzy $f(A,B) = A - B$, cuja função de pertinência é definida por*

$$\mu_{(A-_J B)}(z) = \begin{cases} \sup\limits_{\phi(z)} C(x,y) & se \quad \phi(z) \neq \emptyset \\ \quad 0 & se \quad \phi(z) = \emptyset \end{cases}, \tag{3}$$

sendo $\phi(z) = \{(x,y) : x - y = z\}$.

Definição 3.6. *[4] A subtração de dois números fuzzy completamente correlacionados A e B é definida por*

$$\mu_{A-_C B}(z) = \sup_{z=x-y} \mu_C(x,y).$$

Isto é, $\mu_{A-_C B}(z) = \sup\limits_{z=x-y} \mu_B(y)\mathcal{X}_{\{qx+r=y\}}(x,y)$.

Assim, para todo $\alpha \in [0,1]$, temos $[A -_C B]_\alpha = (q-1)[B]_\alpha + r$.

Observação 3.7. A soma de dois números fuzzy completamente correlacionados A e B é dada por $[A +_C B]_\alpha = (q+1)[B]_\alpha + r$.

Proposição 3.8. *Dados dois números fuzzy A e B completamente correlacionados tais que $[A]_\alpha = q[B]_\alpha + r$, a diferença $A -_C B$ possui a seguinte expressão*

$$[A -_C B]_\alpha = \begin{cases} i. & [(q-1)b_\alpha^-, (q-1)b_\alpha^+] + r & se\, q > 1 \\ ii. & [(q-1)b_\alpha^+, (q-1)b_\alpha^-] + r & se\, 0 \leq q \leq 1 \\ iii. & [(q-1)b_\alpha^+ + r, (q-1)b_\alpha^- + r] & se\, q < 0. \end{cases}$$

Em [5] propôs-se uma aritmética que considera dependência entre números fuzzy, denominada CIA (constraint interval arithmetic). Para tanto ele redefiniu intervalos como funções com valores reais, isto é, um intervalo $[a^-, a^+]$ é dado pela função $A^I(a^-, a^+, \lambda_A) = \{a : a = (1 - \lambda_A)a^- + \lambda_A a^+, 0 \leq \lambda_A \leq 1\}$.

Definição 3.9. *A subtração entre dois intervalos $A = [a^-, a^+]$ e $B = [b^-, b^+]$ é dada por*

$$A -_{CIA} B = \{[(1-\lambda_A)a^- + \lambda_A a^+] - [(1-\lambda_B)b^- + \lambda_B b^+], 0 \leq \lambda_A \leq 1, 0 \leq \lambda_B \leq 1\}.$$

Lodwick em [6] estendeu essa ideia para o caso fuzzy, baseando-se na afirmação que aritmética de números fuzzy é equivalente a aritmética de intervalos em cada α-nível.

Definição 3.10. *A subtração entre dois números fuzzy A e B é definida em níveis por*

$$[A -_{CIA} B]_\alpha = \{[(1-\lambda_A)a_\alpha^- + \lambda_A a_\alpha^+] - [(1-\lambda_B)b_\alpha^- + \lambda_B b_\alpha^+], 0 \leq \lambda_A \leq 1, 0 \leq \lambda_B \leq 1\}.$$

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0067

Observação 3.11. No caso em que os dois números fuzzy são o mesmo

$$\begin{aligned}[A -_{\text{CIA}} A]_\alpha &= \{[(1-\lambda_A)a_\alpha^- + \lambda_A a_\alpha^+] \circ [(1-\lambda_A)a_\alpha^- + \lambda_A a_\alpha^+], 0 \le \lambda_A \le 1\} \\ &= \{0\}\end{aligned}$$

ou seja, $A -_{\text{CIA}} A = \{0\}$.

Definição 3.12. *Dados dois números fuzzy A, B a diferença de Hukuhara (H-deferença) $A \ominus_H B = C$ é o número fuzzy C tal que $A = B + C$, se ele existir.*

Definição 3.13. *[8, 9] Dados dois números fuzzy A, B a diferença generalizada de Hukuhara (diferença gH) $A \ominus_{gH} B = C$ é o número fuzzy C, se ele existir, tal que (i) $A = B + C$ ou (i) $B = A - C$.*

Definição 3.14. *[2, 9] Dados dois números fuzzy A, B a diferença generalizada (diferença g) $A \ominus_g B = C$ é o número fuzzy C, se ele existir, com α-níveis*

$$[A \ominus_g B]_\alpha = cl \bigcup_{\beta \ge \alpha} ([A]_\beta \ominus_{gH} [B]_\beta), \forall \alpha \in [0,1],$$

onde a diferença gH ($\ominus_{gH}$) é acerca dos intervalos $[A]_\beta$ e $[B]_\beta$.

4 Resultados e Aplicações

A seguir faremos as comparações entre as diferenças fuzzy mas antes definiremos a seguinte notação: $X_{\text{diferença}}$ é o conjunto de pares de números fuzzy tal que a diferença entre eles existam.

Diâmetro das diferenças:

- $diam([A \ominus_H B]_\alpha) \le diam([A -_T B]_\alpha) \le diam([A - B]_\alpha)$;
- $diam([A \ominus_{gH} B]_\alpha) \le diam([A -_T B]_\alpha) \le diam([A - B]_\alpha)$;
- $diam([A \ominus_g B]_\alpha) \le diam([A -_T B]_\alpha) \le diam([A - B]_\alpha)$;
- $diam([A -_J B]_\alpha) \le diam([A - B]_\alpha)$;
- $diam([A -_C B]_\alpha) \le diam([A - B]_\alpha)$;
- $diam([A -_{\text{CIA}} B]_\alpha) \le diam([A - B]_\alpha)$.

Existência das diferenças:

- $X_{\text{tradicional}}$, X_{CIA}, X_T, X_J e X_C equivalem a $\mathcal{F}_\mathcal{C}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}_\mathcal{C}(\mathbb{R})$, ou seja, nesses casos a diferença entre dois números fuzzy sempre existe;
- $X_T \subseteq X_{\text{tradicional}}$;
- $X_{\text{CIA}} \subset X_{\text{tradicional}}$;
- $X_C \subseteq X_J \subset X_T$;
- $X_H \subset X_{gH} \subset X_g \subset X_T$ e as diferenças H, gH e g nem sempre existem;

Observação 4.1. Note que a existência da diferença via distribuições conjuntas é determinada pela existência da mesma.

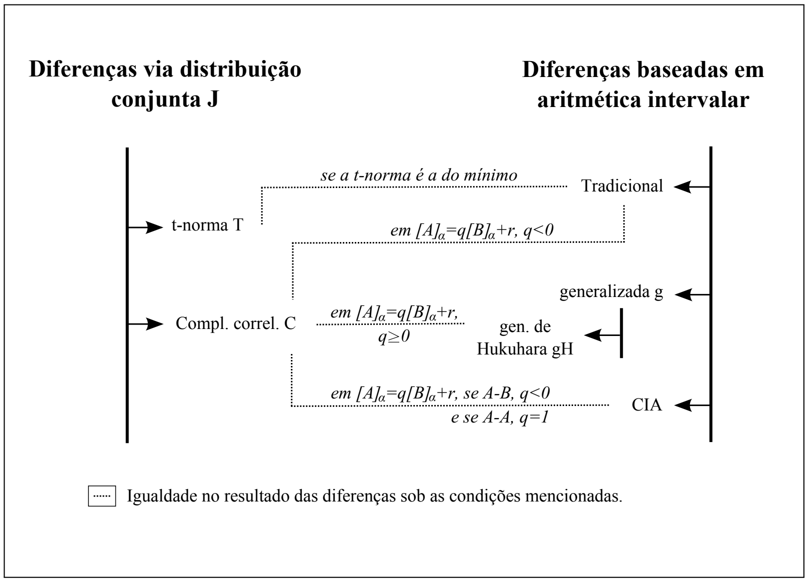

Figura 1: Relações entre diferenças definidas via distribução conjunta e diferenças baseadas em aritmética intervalar. As linhas pontilhadas significam igualdade nos resultados das subtrações entre dois números fuzzy, considerando-se as hipóteses mencionadas.

Como na diferença completamente correlacionada temos

$$[A -_C B]_\alpha = \begin{cases} i. & [a_\alpha^- - b_\alpha^-, a_\alpha^+ - b_\alpha^+] & \text{se } q \geq 1 \\ ii. & [a_\alpha^+ - b_\alpha^+, a_\alpha^- - b_\alpha^-] & \text{se } 0 \leq q \leq 1 \\ iii. & [a_\alpha^- - b_\alpha^+, a_\alpha^+ - b_\alpha^-] & \text{se } q < 0 \end{cases}$$

sabemos que se $q \geq 1$ a diferença C é a diferença de Hukuhara, se $q \geq 0$ a diferença C é a diferença generalizada de Hukuhara e para $q < 0$ a diferença C é a diferença tradicional. Comparando essa diferença com a CIA, notamos que elas são equivalentes se e somente se $q = 1$ quando calculamos $A -_C A$ e $q < 0$ se computamos $A -_C B$.

Considere um modelo epidemiológico de transmissão direta com dois compartimentos suscetível-infectado, por exemplo SI ou SIS sem dinâmica vital. Dessa forma, a proporção de suscetíveis (S) somada a proporção de infectados (I) é igual a 1, isto é equivalente a, $I_t = 1 - S_t$, $\forall t$. Suponha que S seja um número fuzzy triangular $(a; b; c)$, onde fixado $\bar{t}$ temos, $[S_{\bar{t}}]_\alpha = [s_\alpha^-, s_\alpha^+] = [(b-a)\alpha + a, (b-c)\alpha + c]$, $0 < a < b < c < 1$.

Calcularemos $I_{\bar{t}}$, utilizando cada umas das diferenças entre 1 e $S_{\bar{t}}$ dadas na seção anterior.

- Se $S_{\bar{t}}$ e $I_{\bar{t}}$ são não interativos a diferença entre eles é dada de forma tradicional: $[I_{\bar{t}}]_\alpha = [1 - s_\alpha^+, 1 - s_\alpha^-]$.
- Se a diferença é dada por T-normas (diferentes da T-norma do mínimo), ou seja $S_{\bar{t}}$ e $I_{\bar{t}}$ interativos, teremos $[I_{\bar{t}}]_\alpha = \bigcup_{T(\xi,\eta)\geq\alpha} [1]_\xi - [S_{\bar{t}}]_\eta$, $\alpha \in (0, 1]$.
- Se $S_{\bar{t}}$ e $I_{\bar{t}}$ são completamente correlacionados, temos que $[I_{\bar{t}}]_\alpha = 1 - [S_{\bar{t}}]_\alpha$, com $q = -1$ e $r = 1$, daí $[I_{\bar{t}}]_\alpha = [1 - s_\alpha^+, 1 - s_\alpha^-]$. Neste caso $[I_{\bar{t}}]_\alpha +_C [S_{\bar{t}}]_\alpha = 1$.
- A diferença de Hukuraha não existe, pois não temos diâmetro crescente. Por outro lado, as diferenças $\ominus_g$ e $\ominus_{gH}$, são tais que $[I_{\bar{t}}]_\alpha = [1 - s_\alpha^+, 1 - s_\alpha^-]_\alpha$.
- Agora se utilizarmos a $(-_{\text{CIA}})$, obteremos $[I_{\bar{t}}]_\alpha = \{1 - [(1-\lambda_S)s_\alpha^- + \lambda s_\alpha^+], 0 \leq \lambda_S \leq 1\}$= $\{1 - [(1-\lambda_S)((b-a)\alpha + a) + \lambda((b-c)\alpha + c)], 0 \leq \lambda_S \leq 1\}$ que é equivalente ao número triangular $(1-c; 1-b; 1-a)$.

Em suma, do ponto de vista de coerência, a diferença que melhor representa o modelo SI é a diferença completamente correlacionada, pois só nesse caso, $S + I = 1$, que vem de encontro com a hipótese de não haver dinâmica vital.

Agradecimentos

Os dois primeiros autores gostariam de agradecer ao CNPq pelo auxílio financeiro (processo $305862/2013 - 8$ e $141085/2014 - 2$, respectivamente).

Referências

[1] L. C. Barros, R. C. Bassanezi, "Tópicos em lógica fuzzy e biomatemática", IMECC-Unicamp, Campinas, 2010.

[2] B. Barnabás, L. Stefanini, "Generalized differentiability of fuzzy-valued functions", *Fuzzy Sets and Systems*, 230 (2013) 119-141.

[3] V. M. Cabral, "Equações diferenciais fuzzy com parâmetros interativos", Tese de Doutorado, IMECC-Unicamp, 2011.

[4] C. Carlsson, R. Fúller, P. Majlender, Additions of completely correlated fuzzy numbers, em "IEEE International Conference on Proceedings" (Fuzzy Systems), pp.535-539, Budapest, Julho (2004).

[5] W. A. Lodwick, "Constrained interval arithmetic", University of Colorado at Denver, Center for Computational Mathematics, 1999.

[6] W. A. Lodwick, E. A. Untiedt, A comparison of interval analysis using constraint interval arithmetic and fuzzy interval: analysis using gradual numbers, em "Annual Meeting of the North American-NAFIPS" (IEEE), 2008.

[7] M. L. Puri, D. A. Ralescu. "Differentials of fuzzy functions", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 91.2 (1983) 552-558.

[8] L. Stefanini, B. Barnabás, "Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations", *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 71.3 (2009) 1311-1328.

[9] L. Stefanini, "A generalization of Hukuhara difference and division for interval and fuzzy arithmetic", *Fuzzy sets and systems*, 161.11 (2010): 1564-1584.

8 (1965) 338-353.

