Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Equações Diferenciais Fracionárias com Ajuste Dimensional

Matheus Pereira de Melo[1]
Licenciatura em Matemática, Faculdade de Ciências, UNESP, Bauru-SP
Noemi Zeraick Monteiro[2]
Programa de Pós-Graduação em modelagem Computacional, UFJF, Juiz de Fora-MG
Edmundo Capelas de Oliveira[3]
Departamento de Matemática Aplicada, IMECC-UNICAMP, Campinas-SP
Rubens de Figueiredo Camargo[4]
Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências, UNESP, Bauru-SP

A modelagem matemática pode ser vista como o ato de descrever a realidade por meio de equações matemáticas, destacando-se a modelagem de fenômenos via equações diferenciais, as quais relacionam uma função e suas derivadas por meio de uma equação e possuem aplicações em diferentes áreas, como na física, ao modelar o movimento de uma massa presa a uma mola, na biologia, ao modelar a competição entre espécies [1], na farmacologia, ao modelar a farmacocinética de um medicamento [2], dentre outras. Em geral, quanto mais próximo da realidade, mais complexo é o modelo, e desta forma, alguns parâmetros acabam sendo negligenciados na modelagem do problema. Diante disso, o cálculo fracionário, fortemente relacionado ao efeito memória, tem desempenhado importante papel, pois na maioria dos casos permite obter resultados mais refinados do que o cálculo de ordem inteira [3]. A maneira canônica de se utilizar a modelagem fracionária é substituindo a ordem da derivada na equação diferencial por uma ordem arbitrária menor ou igual à do modelo original, o que pode gerar inconsistências físicas, principalmente se as unidades de medida da equação diferencial forem preestabelecidas [3–5]. Neste sentido, em alguns trabalhos [3, 4, 6, 7] os autores apontam para a necessidade de um ajuste dimensional na equação diferencial fracionária, buscando mantê-la com as unidades de medida balanceadas.

Se considerarmos uma equação diferencial de ordem n

$$F\left(t, f(t), ..., \frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = 0, \tag{1}$$

onde F é uma função de $n+2$ variáveis, temos que $\frac{d^n}{dt^n}$ tem dimensão $[t]^{-n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Substituindo a ordem da derivada por uma ordem arbitrária $\alpha \in \mathbb{R}^+$,

$$F\left(t, f(t), ..., \frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha}\right) = 0, \tag{2}$$

com $n-1 < \alpha \leq n$, temos que $\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}$ tem dimensão $[t]^{-\alpha}$. Para realizar o ajuste dimensional da equação (2) podemos inserir um novo parâmetro τ, com dimensão de t, diretamente no operador, e desta forma, a generalização $\frac{d^n}{dt^n} \to [\frac{1}{\tau^{n-\alpha}} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}]$ terá dimensão $[t]^{-n}$.

Se tomarmos uma classe mais restrita de equações diferenciais, dadas na forma

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} = kf(t), \tag{3}$$

[1]pereira.melo@unesp.br
[2]nzmonteiro@ice.ufjf.br
[3]capelas@unicamp.br
[4]rubens@fc.unesp.br

nota-se que a equação possui dimensão $[t]^{-n}$. Ao considerar a versão fracionária, com $n-1 < \alpha \leq n$,

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = kf(t), \tag{4}$$

teremos o lado esquerdo com dimensão $[t]^{-\alpha}$ e o lado direito com dimensão $[t]^{-n}$. Pode-se elevar a constante k à mesma ordem da derivada, e, desta forma, ambos os lados da equação terão dimensão $[t]^{-\alpha}$. Este método se estende naturalmente para modelos mais complexos que (3).

Observa-se que o primeiro método mantém as constantes com as unidades de medidas preestabelecidas, e o segundo método contribui para uma equação com dimensão variável. Cabe ressaltar que a introdução do parâmetro τ traz consigo a necessidade e dificuldade de se determinar um valor, além da ordem da derivada, para o qual os resultados sejam mais acurados, necessitando de estratégias computacionais para a otimização dos resultados [4, 7]. Ainda, quando $\alpha \to 0$, uma constante k tende a τk no primeiro método; já no segundo método, as constantes tendem a 1.

Em resumo, ajustes dimensionais permitem manter a equação fracionária e suas unidades de medida balanceadas, o que contribui para uma melhor interpretação do fenômeno estudado, gerando resultados ainda mais consistentes. Longe de ser uma discussão fechada, o estudo das unidades revela questões importantes. Como exemplo, uma taxa de ordem 1 é um tipo de taxa diferente de uma taxa de ordem 1/2, da mesma forma que, na física, a taxa de ordem 1, velocidade, é diferente daquela correspondente à ordem 2, a aceleração. Mais que isso, não há transformação conhecida que possa conduzir o valor numérico de uma ao valor numérico de outra, seja por potências ou por parâmetros de correção. Assim, os ajustes dimensionais mostrados permitem que as unidades do modelo sejam balanceadas, mesmo que, ainda, não haja um significado físico preciso para essas correções, o que aponta para novas pesquisas e diferentes formas de modelagem fracionária.

Agradecimentos

MPM agradece à FAPESP pela bolsa concedida – Processo: 2021/03424-2. NZM agradece à CAPES (Brasil) – Código de Financiamento 001.

Referências

[1] W. E. Boyce e R. C. DiPrima. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2020.

[2] R. Rang, J. M. Ritter, R. J. Flower e G. Henderson. **Rang & Dale Farmacologia**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2015.

[3] R. F. Camargo e E. Capelas de Oliveira. **Cálculo Fracionário**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

[4] L. K. B. Kuroda e R. F. Camargo. "Generalização da Modelagem Fracionária". Em: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**. 2021, pp. 010418-1–7. DOI: 10.5540/03.2021.008.01.0418.

[5] T. H. Oliveira e R. F. Camargo. "Do Cálculo usual à Modelagem Fracionária com Análise Dimensional". Em: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**. 2019, pp. 010391-1–2.

[6] Gómez-Aguilar et al. "Fractional mechanical oscillators". Em: **Revista Mexicana de Física**. Vol. 58. 4. Sociedade Mexicana de Física, 2012, pp. 348–352.

[7] M. M. Theodoro. "Modelagem Fracionária da Dinâmica da COVID-19". Dissertação de mestrado. UNESP, 2022.

