Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Frequências naturais e modos de vibração de uma viga sobre fundação elástica e condições de contorno não-clássicas

Rubiara Petermann[1] Rosemaira Dalcin Copetti[2]
PPGMat/UFSM, Santa Maria, RS

Com inúmeras aplicações, as vigas vêm recebendo grande atenção de pesquisadores. Várias teorias são usadas para estimar o comportamento dinâmico dessas estruturas, considerando diferentes aspectos e, a partir delas, obtemos resultados com diferentes níveis de precisão [1]. Uma dessas teorias é a teoria de Euler-Bernoulli, que negligencia os efeitos de inércia rotacional e deformações por cisalhamento [2]. As vigas sobre fundação elástica são estudadas para analisar estruturas do solo, como trilhos ferroviários, pavimentos, lages, entre outras. [1]

A equação que descreve o deslocamento transversal de uma viga Euler-Bernoulli uniforme sobre uma fundação elástica e na ausência de forças externas é dada por

$$EI\frac{\partial^4}{\partial x^4}w(t,x) + \rho A\frac{\partial^2}{\partial t^2}w(t,x) + k_f w(t,x) = 0. \tag{1}$$

Neste caso, tem-se: E Módulo de Elasticidade de Young; I momento de inércia; EI rigidez de flexão; ρ densidade linear de massa; A área da seção transversal da viga; ρA constante de massa por unidade de comprimento; $w = w(t,x)$ deslocamento da viga; k_f módulo de fundação elástica; t unidade temporal, $t > 0$; x unidade espacial, $0 < x < L$; e L comprimento da viga. A solução para a eq. (1) pode ser encontrada através da análise modal supondo uma solução da forma

$$w(t,x) = e^{\lambda t}W(x), \tag{2}$$

isto quer dizer que queremos determinar $\lambda = i\omega$, onde ω é a frequência natural para a qual temos que $W(x)$ não é identicamente nulo. Substituindo a eq. (2) na eq. (1), tem-se a equação modal

$$EIW^{(iv)}(x) + (\lambda^2\rho A + k_f)W(x) = 0, \tag{3}$$

onde $W(x)$ são conhecidos como os modos de vibração associados ao sistema. A solução da eq. (3) pode ser escrita em função da solução fundamental, [3] isto é,

$$W(x) = d_1h(x) + d_2h^{'}(x) + d_3h^{''}(x) + d_4h^{'''}(x), \tag{4}$$

onde d_i, $i = 1, ..., 4$, são constantes determinadas pelas condições de contorno da viga e a solução fundamental, $h(x)$, satisfaz o problema de valor inicial com condições iniciais impulsivas

$$\begin{cases} EIh^{(iv)}(x) - \beta^4 h(x) = 0, \\ h(0) = h^{'}(0) = h^{''}(0) = 0, \quad EIh^{'''}(0) = 1, \end{cases} \quad \text{com} \;\; \beta^4 = -(\lambda^2\rho A + k_f). \tag{5}$$

Assim,

$$h(x) = h(x,\lambda) = \frac{\sinh\beta x - \sin\beta x}{2EI\beta^3}. \tag{6}$$

[1]petermann.rubiara@acad.ufsm.br
[2]rosemaira.copetti@ufsm.br

Neste trabalho vamos considerar uma viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica em que há um dispositivo de massa e um de mola anexados em uma das extremidades, diz-se que, neste caso, a viga possui condições de contorno não-clássicas. Essa extremidade, ao sofrer um deslocamento transversal e uma inclinação, tem força resistente resultante dos dispositivos anexados, a qual é equilibrada pela força de cisalhamento na extremidade. Além disso, o momento fletor deve ser zero [2]. Considerando uma viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica, cujas extremidades são fixa em $x = 0$ e com massa e mola anexadas em $x = L$, temos que as condições de contorno dessa viga são, em $x = 0$,

$$w(t, 0) = 0 \;\text{ e }\; \frac{\partial}{\partial x} w(t, 0) = 0,$$

e, em $x = L$,

$$EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(t, L) = 0 \;\text{ e }\; EI \frac{\partial^3}{\partial x^3} w(t, L) = M \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(t, L) + K w(t, L),$$

que aplicadas em eq.(2), resultam as condições de contorno para a equação modal

$$W(0) = 0 \;\text{ e }\; W^{'}(0) = 0 \tag{7}$$

e,

$$EIW^{''}(L) = 0 \;\text{ e }\; EIW^{'''}(L) = \lambda^2 M W(L) + K W(L). \tag{8}$$

Substituindo as condições de contorno em $x = 0$ e as condições iniciais dadas na eq. (5) em (4), resulta imediatamente que $d_3 = d_4 = 0$. Agora, das condições de contorno em $x = L$, obtemos a equação característica da viga Euler-Bernoulli sobre fundação elástica com condições de contorno não clássicas:

$$det \begin{bmatrix} EIh^{''}(L) & EIh^{'''}(L) \\ EIh^{'''}(L) - \lambda^2 M h(L) - K h(L) & EIh^{(iv)}(L) - \lambda^2 M h^{'}(L) - K h^{'}(L) \end{bmatrix} = 0. \tag{9}$$

onde a solução fundamental $h(t)$ é dada na eq. (6).

Utilizando o software Maple 16 e os valores numéricos informados em [4], foram realizadas simulações para obter as frequências naturais e os modos de vibração para diversos valores de M e K. Observou-se que para $K = 0$ e, para M suficientemente pequeno a forma dos modos se aproxima dos modos da viga fixa-livre. Além disso, a partir de um determinado valor de M a forma dos modos assemelha-se ao de uma viga fixa-fixa ou fixa-apoiada.

Referências

[1] D. Basu e N. S. V. K. Rao. "Analytical solutions for Euler-Bernoulli beam on visco-elastic foundation subjected to moving load". Em: **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics** (2012), pp. 1–16. DOI: 10.1002/nag.1135.

[2] S. S. Rao. **Vibration of Continuos Systems**. New Jersey: John Wiley & Sons, 2007. ISBN: 978-0-471-77171-5.

[3] J. R. Claeyssen, G. Canahualpa e C. Jung. "A direct approach to second-order matrix non-classical vibrating equations". Em: **Applied Numerical Mathematics** 30 (1999), pp. 65–78. DOI: 10.1016/S0168-9274(98)00085-3.

[4] Y. Xu e N. Wang. "Transverse free vibration of Euler-Bernoulli beam with pre-axial pressure resting on a variable Pasternak elastic foundation under arbitrary boundary conditions". Em: **Latin American Journal of Solids and Structures** (2020), pp. 1–17. DOI: 10.1590/1679-78256150.