Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Filtro de Kalman para Sistemas Dinâmicos Singulares

Amanda L. P. M. Perticarrari[1]
DECEx/FCAV/Unesp, Jaboticabal, SP

A análise e projeto de sistemas singulares tem recebido grande atenção na literatura. Uma das motivações ocorre devido à formulação que aparece, frequentemente, em vários sistemas como, por exemplo, na modelagem de sistemas agronômicos, econômicos e robóticos ([1],[2]). Quando os valores dos estados de um sistema dinâmico com comportamento aleatório são desconhecidos, a estimativas *a priori* e *a posteriori* destes estados são usualmente obtidas através do filtro de Kalman [3]. Para sistemas singulares discretos no tempo, tem havido um estudo intenso sobre filtros de Kalman, com aplicações em sistemas regulares onde o filtro usual não pode ser utilizado. Um exemplo seria quando existem entradas desconhecidas no sistema regular, nesse caso diferentes formulações têm sido propostas para a resolução do problema de estimativa recursiva [4]. Em um contexto puramente singular, pode-se considerar o método dos mínimos quadrados, o critério da máxima verossimilhança, a estimativa da mínima variância e modelos de inovação tipo ARMA. Para o espaço de estados usual, a inclusão de incertezas limitadas nos parâmetros do sistema tem levado a várias generalizações do filtro de Kalman [5]. No caso singular, as incertezas são consideradas nas covariâncias dos ruídos ([6]).

Nesse trabalho, é apresentado um estudo do problema de estimativa robusta ótima para sistemas dinâmicos singulares em tempo discreto. Para tanto, considere o sistema singular estocástico discreto no tempo dado por:

$$\begin{aligned} E_{i+1}x_{i+1} &= A_i x_i + B_{w,i}w_i + B_{v,i+1}v_{i+1} \\ z_{i+1} &= C_{i+1}x_{i+1} + D_i x_i + K_{w,i}w_i + K_{v,i+1}v_{i+1} \end{aligned} \tag{1}$$

sendo, $i \in \mathbb{N}$, $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ a variável singular, $z_i \in \mathbb{R}^{p_i}$ a medidade de saída, $w_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ e $v_i \in \mathbb{R}^{p_i}$ os ruídos de estado e de medida, respectivamente. A condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^{n_0}$ é uma variável aleatória tal que E_0x_0 tem média $A_{-1}\bar{x}_0$ e covariância P_0; w_i e v_i são variáveis gaussianas, independentes de x_0, com matrizes de covariâncias conhecidas:

$$\mathcal{E}\left\{\begin{bmatrix} w_i \\ v_{i+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_j \\ v_{j+1} \end{bmatrix}^T\right\} = \begin{bmatrix} Q_i & S_i \\ S_i^T & R_{i+1} \end{bmatrix}\delta_{ij} \geq 0 \tag{2}$$

sendo $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

Um dos problemas do filtro de Kalman é construir recursivamente a estimativa linear filtrada $\hat{x}_{k|k} = \mathcal{E}\{x_k \mid z_k, \ldots, z_0\}$. Suponha uma sequência de medidas $\{z_0, \ldots, z_k\}$ e as matrizes E_i, A_i, B_i, C_i e D_i conhecidas e com dimensões apropriadas; e $\bar{x}_0$ o valor inicial fixado. Para cada sequência de estados $\{x_{0|k}, x_{1|k}, \ldots, x_{k|k}, x_{k+1|k}\}$, pode-se definir os seguintes erros de ajuste

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} B_{w,i} & B_{v,i+1} \\ K_{w,i} & K_{v,i+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_{i|k} \\ v_{i+1|k} \end{bmatrix} &:= \begin{bmatrix} E_{i+1}x_{i+1|k} - A_i x_{i|k} \\ z_{i+1} - C_{i+1}x_{i+1|k} - D_i x_{i|k} \end{bmatrix} \\ P_{0|k} &:= E_0 x_{0|k} - A_{-1}\bar{x}_0 \\ K_{v,0}v_{0|k} &:= z_0 - C_0 x_{0|k} \end{aligned} \tag{3}$$

[1]amanda.perticarrari@unesp.br

em que as matrizes E_0 e A_{-1} também possuem dimensões aproriadas. Essas matrizes podem fornecer informações *a priori* do estado inicial x_0 e, usualmente, $E_0 = A_{-1} = I$.

Considere:

$$r_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \qquad r_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

$$s_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -A_{-1}\bar{x_0} & z_0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad s_k = \begin{bmatrix} \hat{x}_{k-1|k-1} & 0 & 0 & 0 & z_k & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$XX_0 = \begin{bmatrix} P_0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & R_0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & -E_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{v,0} & C_0 \\ I & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & K_{v,o}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_0^T & C_0^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1},$$

$$XX = \begin{bmatrix} P_{k-1|k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{k-1} & S_{k-1} & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & S_{k-1}^T & R_k & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{k-1} & B_{w,k-1} & B_{v,k} & -E_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{k-1} & K_{w,k-1} & K_{v,k} & C_k \\ I & 0 & 0 & A_{k-1}^T & D_{k-1}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & B_{w,k-1}^T & K_{w,k-1}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & B_{v,k}^T & K_{v,k}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_k^T & C_k^T & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

As estimativas sucessivas ótimas $\hat{x}_{k|k}$ são obtidas a partir do seguinte algoritmo recursivo:

- Passo 1. Condições iniciais: $\hat{x}_{0|0} := r_0 XX_0 s_0^T$ e $P_{0|0} := -r_0 XX_0 r_0^T$
- Passo 2. Atualize $\{\hat{x}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}\}$ para $\{\hat{x}_{k|k}, P_{k|k}\}$ da seguinte maneira: $\hat{x}_{k|k} := r_k XX^{-1} s_k^T$ e $P_{k|k} := -r_k XX r_k^T$

Referências

[1] L. E. Esteves. “Um modelo dinâmico considerando uma estratégia de desenvolvimento de catching-up tecnológico”. Em: **Revista de Economia** 74 (2020), pp. 85–111.

[2] D. C. Soares, E. M. Bonfim-Silva, T. J. A. da Silva, E. C. A. Anicésio, T. F. Duarte e J. R. Oliveira. “Growth and production of wheat cultivars under water tensions in Cerrado soil”. Em: **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental** 27 (2023), pp. 279–286. DOI: 10.1590/1807-1929.

[3] C.E. de Souza, K.A Barbosa e M. Fu. “Robust filtering for uncertain linear discrete-time descriptor systems”. Em: **Automatica** 44 (2008), pp. 792–798.

[4] J.R. Chavez-Fuentes, E.F. Costa, M.H. Terra e K.D.T. Rocha. “The linear quadratic optimal control problem for discrete-time Markov jump linear singular systems”. Em: **Automatica** 127 (2021), pp. 1–8. DOI: 10.1016/j.automatica.2021.109506.

[5] A.H. Sayed. “A framework for state-space estimation with uncertain models”. Em: **IEEE Transactions on Automatic Control** 46 (2001), pp. 998–1013.

[6] S. Sun, J. Ma e N. Lv. “Optimal and self-tuning fusion Kalman filters for discrete-time stochastic singular systems”. Em: **International Journal of Adaptative Control and Signal Processing** 22 (2008), pp. 932–948.

