Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Preço-sombra em Problemas Degenerados

Beatriz A. A. Quaresma[1] Antônio C. Moretti[2]
IMECC/UNICAMP, Campinas, SP

O uso de preço-sombra e do custo reduzido para a análise econômica de um modelo de Programação Linear é fundamental. Porém, algumas ideias equivocadas desses conceitos podem induzir ao erro, principalmente se o analista desconsiderar a possibilidade do problema primal ser degenerado. Infelizmente não estamos imune do erro ao utilizar resultados fornecidos por softwares de Programação Linear, uma vez que eles tendem a omitir essa informação e não nos alertam que várias bases estão representando o ponto extremo primal ótimo e, consequentemente, o dual é alternativo tendo assim várias possibilidades para os valores dos preços-sombra. Na solução final emitida pelos pacotes computacionais de Programação Linear nos é apresentado apenas uma solução dual, sendo que esta solução dual pode não representar os preços-sombra corretos. Assim, realizaremos as análises utilizando o exemplo apresentado no artigo de Rubin e Wagner [1].

Para compreender esse cenário, utilizaremos os softwares PHP Simplex, GUSEK, Solver do Excel e GLOP em um problema de transporte para encontrarmos a solução. O objetivo é obter um padrão (origem e destino) de menor custo de entrega (produção e frete), considerando as demandas de três mercados (representadas pelas 3 primeiras restrições) e as capacidades de duas fábricas (dadas pelas 2 últimas restrições). Sendo assim, as variáveis x_{ij} indicam uma opção de envio, saindo de um dos fornecedores, j, com entrega em um dos mercados, i.

$$
\begin{array}{ll}
min\ z_D = & 55x_{11} + 10x_{12} + 65x_{21} + 15x_{22} + 80x_{31} + 25x_{32} \\
s.a. & x_{11} + x_{12} \geq 10 \\
 & x_{21} + x_{22} \geq 10 \\
 & x_{31} + x_{32} \geq 10 \\
 & x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 20 \\
 & x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 20 \\
 & x_{ij} \geq 0,\ \forall\ i = 1,2,3,\ j = 1,2
\end{array} \tag{1}
$$

O problema primal (1) tem solução ótima única $x^* = (10, 0, 0, 10, 0, 10)^T$, com o valor ótimo $z_D^* = 950$. Como podemos ver o primal é degenerado, pois, o problema tem 5 restrições e temos apenas 3 variáveis com valores maiores que zero. Logo, o dual será alternativo. De fato, os softwares PHP Simplex, Solver do Excel e GUSEK fornecem o preço-sombra $\pi_1^* = (55, 60, 70, 0, 45)^T$, por outro lado, pelo GLOP o resultado é $\pi_2^* = (55, 65, 75, 0, 50)^T$. Com isso podemos concluir que é possível ter um padrão de envio ótimo único associado a vários preços-sombra ótimos. A pergunta que fazemos é "Qual destas soluções devemos usar na Análise de Sensibilidade?", ou ainda, "Qual destas soluções duais será dada no relatório final do pacote computacional utilizado?".

Dessa forma, se quiséssemos saber, por exemplo, qual a variação na função-objetivo do problema primal ao aumentar uma unidade da demanda para o mercado 2, ou seja, se ao invés da demanda ser 10 toneladas considerarmos 11 toneladas. Ao analisar o preço-sombra emitido pelas

[1] beatrizfjdp@hotmail.com
[2] amoretti@unicamp.br

três primeiras ferramentas, pensaríamos que o aumento seria de 60, porém, esse resultado é equivocado, o acréscimo real é de 65. No entanto, se reduzirmos uma unidade da demanda para o mesmo mercado, a alteração na solução final será um decréscimo de 60.

Ainda, se fizéssemos a mesma análise diminuindo uma tonelada na capacidade da fábrica 1, concluiríamos que o aumento na função-objetivo seria de 45, contudo, o verdadeiro impacto dessa mudança é de 50. Sendo assim, não podemos garantir que o preço-sombra ótimo para um mercado representa necessariamente o custo de atendimento de uma unidade adicional de demanda nesse mercado.

Além disso, os custos reduzidos fornecidos pelos três primeiros softwares são diferentes do fornecido pelo GLOP. Por exemplo, o custo reduzido encontrado em relação a variável x_{12} pelas primeiras ferramentas foi de 0, já pelo aplicativo passou para 5. Logo, podemos ter diferentes custos reduzidos para um padrão de envio que não é usado em um padrão ótimo.

Os exemplos mostram que os softwares de programação linear podem induzir ao erro, quando consideramos as soluções encontradas do primal e dual. Isso acontece principalmente pelo fato das ferramentas emitirem uma solução dual que corresponde a primeira base encontrada que satisfaz o critério de otimalidade e não busca por uma base que corresponde a um aumento no recurso e uma outra base que corresponde a redução do recurso.

É possível verificar se a solução ótima primal é degenerada, basta observamos se: (número de rotas estritamente positivas) + (número de fornecedores com excesso de capacidade) = (número de fornecedores) + (número de mercados), quando temos a igualdade o primal ótimo é não degenerado, consequentemente o dual ótimo é único e temos, de fato, a representação do aumento do custo por uma tonelada da demanda, desde que tenha capacidade disponível. Porém, quando o teste falha não podemos concluir nada.

Em geral, os preços-sombra representam um limite inferior no custo por tonelada de demandas acrescentadas, se existir um fornecedor com excesso de capacidade. Analogamente, o custo reduzido representa o limite inferior no custo por tonelada de transporte de uma rota não usada. Portanto, os preços-sombra devem ser vistos como limitantes do problema primal.

Neste trabalho, mostramos que quando o problema primal não tem solução degenerada o preço-sombra de aumentar um recurso é igual ao preço-sombra de reduzir este mesmo recurso. Mas, quando o problema primal é degenerado, o preço-sombra de aumentar a disponibilidade de um recurso pode ser diferente de reduzir a disponibilidade do mesmo recurso. E, pretendemos mostrar como calcular estes valores de maneira correta.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Referências

[1] D. S. Rubin e H. M. Wagner. "Shadow Prices: Tips and Traps for Managers and Instructors". Em: **Interfaces** 4 (1990), pp. 150–157. DOI: 10.2307/25061378.