Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Comportamento dos Zeros de Polinômios Quase-ortogonais Relacionados aos Polinômios de Chebyshev

Lucas T. da Silva[1] Vanessa A. Botta[2]
FCT/UNESP, Presidente Prudente, SP

Devido à sua vasta aplicabilidade, os polinômios ortogonais têm sido estudados por muitos pesquisadores. Possuem várias propriedades como, por exemplo, zeros reais, distintos e que satisfazem a propriedade do entrelaçamento. Além disso, satisfazem uma relação de recorrência de três termos da forma

$$P_{-1}(x) = 0, P_0(x) = 1, P_n(x) = (\gamma_n x - \beta_n)P_{n-1}(x) - \alpha_n P_{n-2}(x), n \geq 1, \tag{1}$$

onde γ_n, β_n e α_n são números reais com $\gamma_n > 0$ e $\alpha_n > 0$ para cada $n \geq 1$. Mais detalhes e outras propriedades podem ser vistos em [2].

Dentre os polinômios ortogonais clássicos, consideraremos aqui os de Chebyshev de 1ª, 2ª, 3ª e 4ª espécies, representados respectivamente por $T_n(x)$, $U_n(x)$, $V_n(x)$ e $W_n(x)$. São polinômios ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ em relação às seguintes funções peso, respectivamente: $\omega_1 = (1-x^2)^{-1/2}$, $\omega_2 = (1-x^2)^{1/2}$, $\omega_3 = (1+x)^{1/2}(1-x)^{-1/2}$ e $\omega_4 = (1-x)^{1/2}(1+x)^{-1/2}$. No que se refere à relação de recorrência de três termos, no caso dos polinômios de Chebyshev, segue que $\gamma_n = 2$, $\beta_n = 0$ e $\alpha_n = 1$, $n \geq 2$, onde $T_0(x) = U_0(x) = V_0(x) = W_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $U_1(x) = 2x$, $V_1(x) = 2x - 1$ e $W_1(x) = 2x + 1$.

Um outro conceito de ortogonalidade que abordaremos aqui é o de polinômios quase-ortogonais [2].

Definição 1. *Os polinômios quase-ortogonais, denotados por R_n, são definidos a partir da seguinte igualdade:*

$$\int_a^b x^k R_n(x)\omega(x)\,dx = 0, \tag{2}$$

para $k = 0, 1, \ldots, n-1-r$ sendo ω uma função peso positiva no intervalo $[a, b]$.

Uma outra forma de representar essa classe de polinômios, em função de uma família de polinômios ortogonais $\{P_n(x)\}$, ortogonais no intervalo $[a, b]$ com relação à função peso ω, é dada pela seguinte equação

$$R_n(x) = c_{n,0}P_n(x) + c_{n,1}P_{n-1}(x) + \ldots + c_{n,r}P_{n-r}(x) \tag{3}$$

onde $c_{n,i}$, com $i = 1, \ldots, r$ são escalares que podem depender de n e $c_{n,0}c_{n,r} \neq 0$.

O objetivo deste trabalho visa mostrar o comportamento dos zeros dos polinômios quase-ortogonais de ordem no máximo dois relacionados aos polinômios de Chebyshev. Uma das motivações para o estudo da localização dos zeros de polinômios quase-ortogonais de grau n está relacionado com as fórmulas de quadratura positivas com n nós, que é exata para polinômios de grau $2n - r - 1$, $0 \leq r \leq n$. Mais informações podem ser vistas na referência [4].

[1]lucas.tertuliano@unesp.br
[2]vanessa.botta@unesp.br

Apresentaremos a seguir, alguns resultados a respeito do comportamento dos zeros dos polinômios $R_n(x)$, onde

$$R_n(x) = P_n(x) + a_n P_{n-1}(x) + b_n P_{n-2}(x), a_n, b_n \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

que é um polinômio quase-ortogonal de ordem no máximo dois.

O teorema a seguir apresenta a localização dos zeros de $R_n(x)$ nos casos em que $b_n < \alpha_n$, $b_n = \alpha_n$ e $b_n > \alpha_n$.

Teorema 1. *Sejam $y_{i,n}$, $i = 1, \ldots, n$, zeros do polinômio $R_n(x)$.*

a) Se $b_n < \alpha_n$, $R_n(x)$ tem n zeros reais e distintos tais que $y_{n,n} < x_{n-1,n-1}$, $x_{i,n-1} < y_{i,n} < x_{i-1,n-1}$ $(i = 2, \ldots, n-1)$, e $y_{n,n} > x_{1,n-1}$, onde $x_{i,n-1}$, $i = 1, \ldots, n-1$, representam os zeros do polinômio $P_{n-1}(x)$.

b) Se $b_n = \alpha_n$, $R_n(x)$ tem n zeros reais. Além disso, $n-1$ zeros de $R_n(x)$ coincidem com os zeros de $P_{n-1}(x)$.

c) Se $b_n > \alpha_n$, $R_n(x)$ tem n-2 zeros reais e distintos tal que entre dois zeros de $P_{n-1}(x)$ tem exatamente um zero de $R_n(x)$(propriedade do entrelaçamento).

Demonstração. Pode ser encontrada em [1]. □

No caso específico dos polinômios de Chebyshev, $\alpha_n = 1$. A escolha dos polinômios de Chebyshev se deve ao fato de que, através de uma mudança de variável, podemos construir polinômios auto-recíprocos reais usando uma combinação linear de polinômios de Chebyshev. Mais detalhes sobre os polinômios auto-recíprocos reais podem ser vistos em [3].

Desse modo, fica evidente que os polinômios quase-ortogonais possuem características próprias e propriedades similares aos polinômios ortogonais. E os zeros de $R_n(x)$, representado pela equação (4), encontram-se na reta real de acordo com as condições estabelecidas no Teorema 1.

Agradecimentos

À fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro (Processo Número 2022/08314-3).

Referências

[1] V. BOTTA e H. M. SUNI. “On the location of zeros of quasi-orthogonal polynomials with applications to some real self-reciprocal polynomials”. Em: **Classical Analysis** 19 (2022), pp. 89–115.

[2] T. S. CHIHARA. **An Introduction to Orthogonal Polynomials.** New York: Gordon e Breach Science Publishers, 1978.

[3] D. JOYNER. “Zeros of Some Self-Reciprocal Polynomials”. Em: **Excursions in Harmonic Analysis** Vol. 1 (2013), pp. 329–348.

[4] Y. XU. “A characterization of positive quadrature formula”. Em: **Math. Comp** 62.206 (1994), pp. 703–718.

