Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Radiação de ondas em água por um disco submerso

Juliana Sartori Ziebell[1] Leandro Farina[2]
UFRGS, Porto Alegre, RS

Ondas na superfície da água podem sofrer mudanças de direção em seu movimento quando na presença de regiões como ilhas, enseadas e portos, ou de um corpo flutuante ou submerso com dimensões comparáveis ao comprimento da onda [1]. A interação entre ondas em água e objetos finos submersos foi investigada em diversos trabalhos. Martin e Farina [2], trataram o problema de uma placa fina submersa em águas profundas. Esse problema foi reduzido a uma equação integral hipersingular bidimensional. Em particular, se essa placa é um disco horizontal, essa equação pode ser reduzida a uma equação integral de Fredholm do segundo tipo. Algumas soluções numéricas foram apresentadas para os coeficientes hidrodinâmicos (massa adicional e amortecimento). Em [3], o problema tridimensional da interação de um disco fino horizontal submerso com ondas em água também foi reduzido a uma equação integral hipersingular. Alguns resultados numéricos foram obtidos com ênfase nas propriedades de espalhamento do disco submerso. Ziebell e Farina [4] analisaram a interação de ondas com um disco rugoso submerso em águas profundas e o problema semelhante para domínios não-circulares foi abordado por Farina et al. [5]. Usando um método perturbativo e o Teorema de Green, esse problema foi reduzido a uma sequência de equações integrais hipersingulares sobre um disco plano. Usando o mesmo método adotado em [3], obteve-se resultados numéricos para os coeficientes hidrodinâmicos que demonstraram que o campo de ondas longe do obstáculo não depende das propriedades estatísticas da placa e sim de sua forma específica.

A relevância desses estudos dá-se em muitos problemas de interesse de engenheiros oceânicos e arquitetos navais. Nas atividades industriais, científicas, comerciais e militares no mar, é importante entender a influência que as ondas exercem nas grandes estruturas flutuantes ou submersas na água. O principal objetivo deste trabalho é mostrar como lidar com cada um dos casos citados acima.

Para todos esses casos, o potencial do fluido ϕ deve satisfazer a equação de Laplace

$$\Delta\phi = 0, \text{ no fluido,} \tag{1}$$

A condição de superfície e a condição de fronteira no objeto submerso Ω são dadas por, respectivamente,

$$\frac{\omega^2}{g}\phi + \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \ \text{ (em } z = 0), \tag{2}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = V \ \text{ em } \Omega, \tag{3}$$

onde ω é a frequência, g é a aceleração da gravidade e V é uma função dada. Ainda a condição de radiação é dada por

$$r^{1/2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial r} - ik\phi\right) \to 0 \ \text{ quando } \ r = (x^2+y^2)^{1/2} \to \infty. \tag{4}$$

[1]julianaziebell@ufrgs.br
[2]farina@alum.mit.edu

onde k é o número de onda. No decorrer do texto, P, Q denotam pontos no fluido e p, q denotam pontos no corpo submerso.

Vamos tomar Ω como uma superfície de um corpo fino e denotaremos a descontinuidade do potencial do fluido por

$$[\phi] = \lim_{Q\to q^+} \phi(Q) - \lim_{Q\to q^-} \phi(Q), \;\; q \in \Omega,\, q^- \in \Omega^-,\, q^+ \in \Omega^+. \tag{5}$$

Então, a equação integral hipersingular para $[\phi]$ é dada por

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{\Omega} [\phi(q)] \frac{\partial^2}{\partial n_p \partial n_q} G(P, q) dS_q = V(p), \;\; p \in \Omega, \tag{6}$$

com

$$[\phi] = 0 \;\text{ em } \partial\Omega \tag{7}$$

e $G(P, Q) \equiv G(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = (R^2 + (z - z_0)^2)^{-1/2} + G_1(P, Q)$, é a função de Green do problema, sendo $R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Logo,

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{\Omega} [\phi(q)] \frac{1}{R^3} dS_q + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} [\phi(q)] M(p, q) = V(p), \;\; p \in \Omega. \tag{8}$$

onde $M(p, q) = \frac{\partial^2}{\partial n_p \partial n_q} G_1(P, q)$. Por (Newmann, 1984 [6]),

$$G_1(R, z + z_0) = \oint_0^\infty e^{-\alpha(z+z_0)} J_0(\alpha R) \frac{\alpha + k}{\alpha - k} d\alpha = k \Big[(\mathcal{X}^2 + \mathcal{Z}^2)^{-1/2} - \pi e^{-\mathcal{Z}} (H_0(\mathcal{X}) + Y_0(\mathcal{X})) \tag{9}$$

$$-2 \int_0^{\mathcal{Z}} e^{t-\mathcal{Z}} (\mathcal{X}^2 + t^2)^{-1/2} dt \Big] + 2\pi i k e^{-\mathcal{Z}} J_0(\mathcal{X}), \tag{10}$$

onde $\mathcal{X} = kR$ e $\mathcal{Z} = k(z + z_0)$, H_0 é a função de Struve de ordem 0 e J_0 e Y_0 denotam as funções de Bessel do primeiro e segundo tipo, respectivamente.

Neste trabalho, a partir da formulação descrita acima, iremos mostrar alguns dos resultados obtidos em [1], [5] e [4].

Referências

[1] L. Farina e J. S. Ziebell. **Interação de ondas aquáticas com obstáculos finos submersos. Pesquisas aplicadas à modelagem matemática**. 1a. ed. Ijuí: Editora UNIJUI, 2012, pp. 13–54. ISBN: 978-85-419-0041-6.

[2] L. Farina e P.A. Martin. “Radiation of water waves by a heaving submerged horizontal disc”. Em: **Journal of Fluid Mechanics** 337 (1997), pp. 365–379. DOI: 10.1017/S0022112097004989.

[3] L. Farina e P.A. Martin. “Scattering of water waves by a submerged disc using a hypersingular integral equation”. Em: **Applied Ocean Research** 20 (1998), pp. 121–134. DOI: 10.1016/S0141-1187(97)00039-4.

[4] J.S. Ziebell e L. Farina. “Water wave radiation by a submerged rough disc”. Em: **Wave Motion** 49 (2012), pp. 34–39. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2011.07.001.

[5] L. Farina, R. L. da Gama, S. Korotov e J. S. Ziebell. “Radiation of water waves by a submerged nearly circular plate”. Em: **Journal of Computational and Applied Mathematics** 49 (2012), pp. 34–39. DOI: 10.1016/j.cam/2016.04.009.

[6] J.N. Newmann. “Double-precision evaluation of the oscilatory source potential”. Em: **J. Ship Res.** 28 (1984), pp. 151–154. DOI: 10.5957/jsr.1984.28.3.151.