Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Análises Proporcionais do Volume de Reticulados Algébricos nas Dimensões 2, 4 e 8

José Cristiano Alves da Silva[1]
IMECC - Unicamp, Campinas, SP
Cintya Wink de Oliveira Benedito[2]
Faculdade de Engenharia - Unesp, São João da Boa Vista, SP

De forma geral, reticulados construídos a partir do homomorfismo canônico ou de suas perturbações são chamados de reticulados algébricos [1]. Existem diversos trabalhos que buscam construir bons reticulados algébricos e analisar suas propriedades, como por exemplo, reticulados com boas densidade de centro [1–3]. Neste trabalho apresentamos, a partir de suas matrizes geradoras e de Gram, uma análise de alguns reticulados algébricos construídos em [3], os quais são versões rotacionadas dos reticulados mais densos nas dimensões 2, 4 e 8. Veremos que, aplicando o algoritmo LLL (*Lenstra–Lenstra–Lovász*) na matriz de Gram do reticulado, obtemos uma matriz de base reduzida, a qual nos possibilita obter o fator de escala c que expressa a proporção entre os reticulados e está associada a razão R entre os volumes dos reticulados. Estes elementos nos permitem diferenciar as rotações obtidas e comparar seus volumes proporcionalmente em relação aos reticulados mais densos nas dimensões consideradas. Apresentamos a seguir algumas análises realizadas através de exemplos sendo que a análise completa foi apresentada em [3].

Sabe-se que o reticulado A_2 é o reticulado mais denso na dimensão 2 e que este é equivalente ao reticulado hexagonal Λ_H, [4]. Sejam $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\zeta_3)$ um corpo de números e $\mathbb{I}_{\mathbb{K}} = \mathbb{Z}[\zeta_3]$ o seu anel dos inteiro, e considere o reticulado algébrico Γ_2 gerado a partir da perturbação σ_α, $\alpha \in \mathbb{K}$, do homomorfismo canônico aplicada ao ideal $\mathcal{U} = (-1+\zeta_3)\mathbb{I}_{\mathbb{K}}$. Em [3] mostramos que Γ_2 é uma versão rotacionada do reticulado A_2. Analisando esta versão rotacionada através da construção de suas matrizes geradora M_2 e de Gram G_2, com determinantes $det(M_2) = 12\sqrt{3}$ e $det(G_2) = 432$, respectivamente, como $det(G_H) = \frac{3}{4}$, segue que

$$det(G_2) = c^2 \cdot det(G_H) \Rightarrow 432 = c^2 \cdot \frac{3}{4} \Rightarrow c = 24. \tag{1}$$

Agora, aplicando o algoritmo LLL na matriz de Gram G_2 obtemos uma matriz reduzida V tal que

$$G_2' = \frac{1}{c} \cdot V \cdot G_2 \cdot V^t = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

e $det(G_2') = \frac{3}{4} = det(G_H)$, em que G_2' é a matriz geradora de um reticulado equivalente a Γ_2. Além disso, como o volume do reticulado hexagonal é dado por $vol(\Lambda_H) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e o volume do reticulado Γ_2 é $vol(\Gamma_2) = det(M_2) = 12\sqrt{3}$, temos que a razão

$$R = \frac{vol(\Gamma_2)}{vol(\Lambda_H)} = \frac{12\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 24 = c, \tag{3}$$

[1] j181269@dac.unicamp.br
[2] cintya.benedito@unesp.br

representa a proporção entre o reticulado Γ_2 e o reticulado hexagonal Λ_H, sendo esta, dada pelo fator de escala $c = 24$. Na Figura 1 apresentamos a comparação destes reticulados em que a região fundamental do reticulado Γ_2 é 24 vezes maior que a região fundamental do reticulado Λ_H.

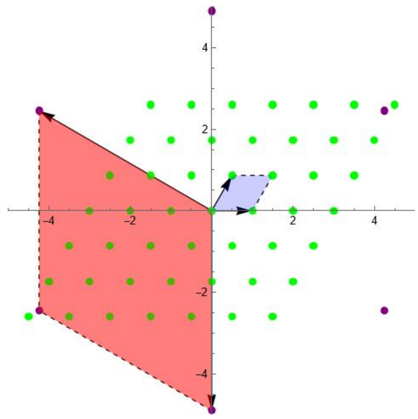

Figura 1: Comparação entre Γ_2 e Λ_H. Fonte: Próprio Autor.

Nas dimensões 4 e 8 não é possível visualizar geometricamente mas podemos ver algebricamente como se comportam as proporções dos volumes dos reticulados construídos em relação aos reticulados mais densos nestas dimensões. Na dimensão 4, construímos em [3] o reticulado algébrico Γ_4 gerado, a partir de σ_α, pelo ideal $\mathcal{U} = (-1 + \zeta_{12}^2 + \zeta_{12}^3)\mathbb{I}_{\mathbb{K}}$, em que $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\zeta_{12})$ e $\mathbb{I}_{\mathbb{K}} = \mathbb{Z}[\zeta_{12}]$, que é uma versão rotacionada do reticulado D_4, o reticulado mais denso na dimensão 4, [4]. Sabendo que o volume de D_4 é $vol(D_4) = 2$ e o volume de Γ_4 é $vol(\Gamma_4) = det(M_4) = 18$, temos que na dimensão 4 a razão R e o fator de escala c estão relacionados por $\sqrt{R} = \sqrt{\frac{vol(\Gamma_4)}{vol(D_4)}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = 3 = c$. Esta relação representa a proporção entre o reticulado Γ_4 e o reticulado D_4, ou seja, a região fundamental do reticulado Γ_4 é 3 vezes maior que a região fundamental do reticulado D_4. Já na dimensão 8, construímos em [3] o reticulado algébrico Γ_6 gerado, a partir de σ_α, pelo ideal $\mathcal{U} = (1 - \zeta_{20}^2 - \zeta_{20}^3 - \zeta_{20}^4 - \zeta_{20}^6)\mathbb{I}_{\mathbb{K}}$, em que $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\zeta_{20})$ e $\mathbb{I}_{\mathbb{K}} = \mathbb{Z}[\zeta_{20}]$, que é uma versão rotacionada do reticulado E_8, [4]. Sabendo que o volume de E_8 é dado por $vol(E_8) = 1$ e o volume de Γ_6 é $vol(\Gamma_6) = det(M_6) = 10000$, temos que na dimensão 8 a razão R e o fator de escala c estão relacionados por $\sqrt[4]{R} = \sqrt[4]{\frac{vol(\Gamma_6)}{vol(E_8)}} = 10 = c$. Esta relação representa a proporção entre os reticulados Γ_6 e reticulado E_8, ou seja, a região fundamental do reticulado Γ_6 é 10 vezes maior que a região fundamental do reticulado E_8.

Referências

[1] F. Oggier. “Algebraic methods for channel coding”. Tese de doutorado. École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2005.

[2] A. A. Andrade, A. J. Ferrari, C. W. O. Benedito e S. I. R. Costa. “Constructions of algebraic lattices”. Em: **Computational & Applied Mathematics** 29 (2010), pp. 493–505. DOI: 10.1590/S1807-03022010000300010.

[3] J. C. A. Silva. “Construção de reticulados algébricos nas dimensões 2, 4 e 8”. Dissertação de mestrado. Universidade Estadual de Campinas-Unicamp, 2022.

[4] J. H. Conway e N. J. A. Sloane. **Sphere packing, lattices and groups**. Springer-Verlag, 1999. ISBN: 978-1-4757-6568-7.

