Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Geometria de Distâncias na Esfera

Emerson Dutra[1]
IMECC/UNICAMP, Campinas, SP e IFMT, Cuiabá, MT
Jorge Alencar[2]
IFTM, Uberaba, MG
Carlile Lavor[3]
IMECC/UNICAMP, Campinas, SP

Neste trabalho, iremos explorar alguns resultados obtidos por Kurt Gödel relacionados à Geometria de Distâncias em uma superfície esférica [1].

Em Geometria de Distâncias, temos que a realização de um dado grafo, com pesos nas arestas, é uma "representação"de seus vértices em algum espaço euclidiano $\mathbb{R}^K$, para algum inteiro $K > 0$, de modo que as distâncias euclidianas sejam iguais aos pesos das arestas.

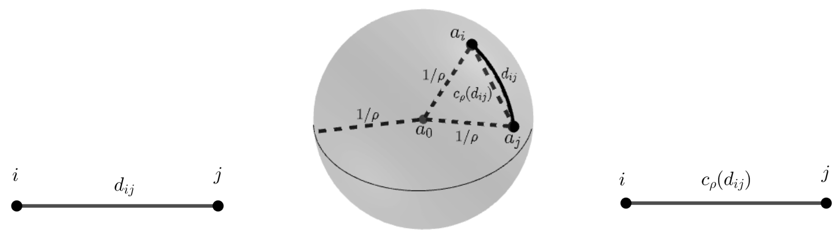
Em 1933, durante um colóquio em que Gödel participava, Laura Klanfer propôs o seguinte problema [2]: dado um conjunto de quatro pontos afimente independentes no espaço $\mathbb{R}^3$, e suas respectivas distâncias euclidianas, é possível obter um novo conjunto de pontos pertencentes à superfície de uma esfera, em $\mathbb{R}^3$, de modo que as distâncias geodésicas sejam iguais as distâncias euclidianas entre os pontos do conjunto inicialmente dado? Gödel provou que sim e escreveu resultados importantes a respeito. Em [3], uma generalização desse resultado foi realizada para uma dimensão arbitrária K, onde K é um número inteiro positivo.

Seja $G = (V, E, d)$ um grafo simples, conexo e com pesos nas arestas $d : E \to (0, \infty)$. Consideremos ainda que o grafo G é realizável em $\mathbb{R}^K$, mas não em $\mathbb{R}^{K-1}$, e uma esfera $(K-1)-$dimensional de raio $\frac{1}{\rho}$, com $\rho > 0$, que denotaremos por $\frac{1}{\rho}\mathbb{S}^{K-1}$. O valor de ρ é tomado de modo a garantir que para cada $\{i, j\} \in E$, exista $a_i, a_j \in \frac{1}{\rho}\mathbb{S}^{K-1}$ tal que $\alpha(a_i, a_j)$ tenha comprimento igual a d_{ij}, onde $\alpha(a_i, a_j)$ é a geodésica entre a_i e a_j. Usando conceitos de trigonometria, temos que o comprimento de corda do arco $\alpha(a_i, a_j)$, denotado por $c_\rho(\alpha(a_i, a_j))$, é dado por

$$c_\rho(\alpha(a_i, a_j)) = \frac{2}{\rho} \sin\left(\frac{\alpha(a_i, a_j)\rho}{2}\right). \tag{1}$$

Usando o fato de que $\alpha(a_i, a_j) = d_{ij}$, segue que $c_\rho(\alpha(a_i, a_j)) = c_\rho(d_{ij})$ e, assim, obtemos um conjunto de distâncias euclidianas $c_\rho = \{c_\rho(d_{ij})\}$ para todo $d_{ij} \in d(E)$. A Figura 1 mostra essas etapas para $K = 3$.

[1]emersondutra.cba@gmail.com
[2]jorgealencar@iftm.edu.br
[3]clavor@unicamp.br



(a) Aresta do grafo G com seu respectivo peso.

(b) Obtendo $c_\rho(d_{ij})$ usando os pontos $a_i, a_j \in \frac{1}{\rho}\mathbb{S}^2$ tal que $\alpha(a_i, a_j) = d_{ij}$.

(c) Aresta do grafo H com seu respectivo peso.

Figura 1: Como obter os pesos das arestas do grafo H.

Seja $H = (V, E, c_\rho)$ um grafo simples, conexo e com pesos nas arestas $c_\rho : d \to (0, \infty)$ e $x = \{x_1, \cdots, x_{K+1}\}$ a realização do grafo H em $\mathbb{R}^K$. Pode-se provar que existe uma esfera de raio r que circunscreve a realização do grafo H. Caso as geodésicas $\alpha(x_i, x_j)$ coincidam com as distâncias d_{ij}, temos que x é a realização de G em $r\mathbb{S}^{K-1}$. A Figura 2 mostra a representação de um grafo H realizável em $\mathbb{R}^3$, onde, em vermelho, temos as cordas $c_\rho(x_i, x_j) = c_\rho(d_{ij})$ e, em azul, as geodésicas $\alpha(x_i, x_j)$.

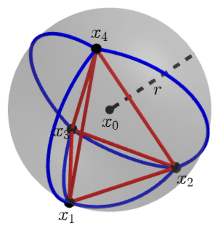


Figura 2: Realização de um grafo H, realizável em $\mathbb{R}^3$.

A Figura 2 somente será uma realização do grafo G quando $\alpha(x_i, x_j) = d_{ij}$. Estamos trabalhando na teoria que fundamenta esses problemas e, no momento, já conseguimos desenvolver um algoritmo que determina o valor de ρ, a fim de garantir que a realização de H seja a realização de G na esfera e, ao mesmo tempo, gera tal realização.

Referências

[1] L. Liberti e C. Lavor. "Six mathematical gems from the history of distance geometry". Em: **International Transactions in Operational Research** 23.5 (2016), pp. 897–920.

[2] S. Feferman, J. W. Dawson Jr, S. C. Kleene, G. H. Moore, R. M. Solovay e J. Van Heijenoort. **Kurt Godel: Collected Works. Vol. 1: Publications 1929-1936**. Oxford University Press, Inc., 1986.

[3] L. Liberti, G. Swirszcz e C. Lavor. "Distance geometry on the sphere". Em: **Discrete and Computational Geometry and Graphs: 18th Japan Conference, JCDCGG 2015, Kyoto, Japan, September 14-16, 2015, Revised Selected Papers**. Springer. 2016, pp. 204–215.

