Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

# Distribuições de probabilidades do tipo fase com aplicação na primeira onda da pandemia de COVID-19 no Brasil

André C. N. M. Silva [1]
IMECC, Campinas, SP

As distribuições de probabilidades do tipo fase são basicamente formadas por uma convolução ou mistura de distribuições exponenciais, podendo ser observadas como uma representação do tempo até a absorção numa cadeia de Markov e sua grande vantagem é ter propriedades analíticas que podemos manipular facilmente [1]. Estas distribuições são usadas em diversas áreas de modelagem estocástica, como em bioestatítica, telecomunicações, confiabilidade de sistemas, análise de desenpenho de redes de computadores, etc.

**Definição 0.1.** *Um Processo Estocástico* $\{X(t), t \in T\}$ *é uma coleção de variáveis aleatórias indexadas a uma variável (normalmente a uma variável de tempo). Aos valores que* $X(t)$ *pode assumir chamamos de estados e ao seu conjunto* $E$ *chamamos de espaço de estados.*

Como exemplos podemos citar os casos abaixo:

i. $X(t)$ representa o estado de uma máquina (ligada/desligada) no fim de um dia $t$;

ii. $X(t)$ representa o número de mortes de uma infecção no instante $t$.

Pode-se notar como no item $(i)$ que em alguns casos o tempo é considerado de forma discreta. No entanto, em geral a variável tempo é por definição, uma variável contínua. As cadeias de Markov formam um ramo importante dos processos estocásticos [2].

**Definição 0.2.** *Um processo estocástico* $X(t);\ t \in \mathbb{R}^+$ *é uma cadeia de Markov a tempo contínuo com espaço de estados* $E$*(enumerável) se para qualquer* $t, s \geq 0$ *e* $j \in E$*:*

$$P\{X_{t+s} = j/X_u; u \leq t\} = P\{X_{t+u} = j/X_t\} \tag{1}$$

**Definição 0.3.** *Uma variável aleatória positiva e contínua* $X$ *possui distribuição de probabilidade do tipo fase, definida em* $[0, \infty)$*, se e somente se,* $X$ *pode representar o tempo até a absorção numa Cadeia de Markov a tempo contínuo com espaço de estados discretos* $E = 1, 2, ..., m+1$*, onde os estados* $1, 2, ..., m$ *são transitórios (*$P_t(i,j) > 0$*) e o estado* $m+1$ *é absorvente (*$P_t(j,j) = 1$*).*

Em [3] temos que a hipótese de $m$ estados transitórios e um absorvente é verificada se e somente se a matriz $\Lambda$ é não singular e que, sob esta hipótese, dado o vetor $[P_0, p_{0a}]$ a distribuição de probabilidades $F_{PH}(t)$ do tempo até a absorção no estado $m+1$ é dada para $t \geq 0$ por:

$$F_{PH}(t) = 1 - P_0 \exp(\Lambda t) 1_m \tag{2}$$

As distribuições exponenciais, hiperexponenciais, de Erlang e de Cox são casos especiais de distribuições do tipo fase e um exemplo clássico é a distribuição de Erlang que possui para $t \geq 0$ e $m > 0$ inteiro a função densidade de probabilidade dada por:

[1] a230144@dac.unicamp.br

 

$$f(t) = \frac{\lambda^m}{(m-1)!} t^{m-1} exp(-\lambda t) \tag{3}$$

O exemplo dado reflete o comportamento da Distribuição do Tipo Fase de Erlang e aproxima as probabilidades semanais de COVID-19 (mortes semanais divididas pelo total de mortes no período) na primeira onda da pandemia no Brasil, o que equivale a dados da semana que inicia no dia 15 de março e termina em 08 de novembro de 2020. Os dados foram coletados no site da Organização Mundial de Saúde [4] que disponibiliza mortes de COVID-19 de diversos países do mundo. Para calcular os parâmetros segundo [5] existem métodos eficientes como o método da máxima verossimilhança ou o método dos momentos. Para este trabalho foi usado o pacote (NonlinearModelFit) no software Wolfram Mathematica versão 13.2 que possui um conjunto de métodos padrões automáticos que inclui método do Gradiente, Newton, Pontos Interiores e etc.

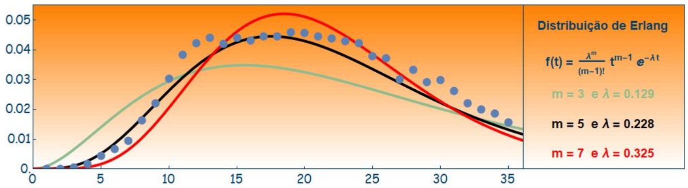


Figura 1: Distribuição de Erlang com 3, 5 e 7 estados. Fonte: autor.

Podemos perceber que como a Distribuição de Erlang é assímetrica tende a aproximar bem as curvas de uma pandemia, denominadas curvas pandêmicas. Analisar esses tipos de curvas permitem tomar decições e avaliar uma das situações mais importantes durante uma pandemia: a eficácia de medidas de contenção do vírus [6].

## Referências

[1] M. N. Miranda, S. V. Carvalho e A. J. P. Franco. "Aproximação de Distribuições de Probabilidades Não-Exponenciais por distribuições do Tipo Fase". Em: **XXXVIII SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL** 38 (2006), pp. 1604–1615.

[2] E. Çinlar. **Introduction to Stochastic Processes.** 2a. ed. New York: Dover Publication Inc., 2013. ISBN: 978-0-486-49797-6.

[3] M. F. Neuts. **Matrix-Geometric solutions in stochastic models - an algorithmic approach**. 1a. ed. London: The John Hopkins Press Ltd, 1981. ISBN: 0-8018-2560-1.

[4] WHO. **Site oficial da situação COVID-19 da Organização Mundial de Saúde**. Online. Acessado em 27/03/2023, `https://github.com/CSSEGISandData/COVID-19/tree/master/who_covid_19_situation_reports`.

[5] H. Bolfarine e M. C. Sandoval. **Introdução à Inferência Estatística.** 2a. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010. ISBN: 978-85-85818-82-1.

[6] A. Iamarino e S. Lopes. **Coronavírus: explorando a pandemia que mudou o mundo**. 1a. ed. São Paulo: Moderna, 2020. ISBN: 978-65-5779-471-5.