Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Modelagem numérica de canais naturais via Equações de Saint-Venant

Lucas F. Moura Oliveira[1] Thiago F. C. Carrenho[2] Maicon Ribeiro Correa[3]
DMA/IMECC - Unicamp, Campinas, SP

Neste trabalho, abordamos a resolução numérica de leis de conservação e de balanço unidimensionais de natureza hiperbólica a partir da implementação de esquemas de Elementos Finitos do tipo Galerkin Descontínuo e esquemas de Volumes Finitos Centrais de Alta Ordem, com especial interesse no estudo das Equações de Águas Rasas unidimensionais (ou Equações de Saint-Venant) e na simulação de escoamentos em canais abertos com geometria irregular.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}$ e $I = (t_0, T)$, respectivamente, o domínio espacial do problema analisado e o intervalo de tempo considerado. Uma lei de conservação hiperbólica consiste em um sistema de equações diferenciais parciais que pode ser escrito na seguinte forma, denominada forma forte:

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = 0, \tag{1}$$

sendo $x \in \Omega$ a variável espacial, $t \in I$ a variável temporal, $\mathbf{u} : \Omega \times I \to \mathbb{R}^m$ o vetor de m variáveis conservadas a serem calculadas e $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ a função de fluxo físico tal que a matriz Jacobiana, $\mathbf{f}'(\mathbf{u})$, é diagonalizável e possui apenas autovalores reais [1]. Equações hiperbólicas estão presentes na Acústica, Dinâmica de Fluidos, entre outros [2]. Contudo, raramente encontram-se soluções analíticas para problemas de interesse prático, o que torna a resolução numérica de leis de conservação útil para a compreensão de problemas associados a esse tipo de lei. Dentre eles, podemos destacar o escoamento de fluidos em canais, como na simulação de rios e do rompimento de barragens. Em particular, as Equações de Saint-Venant consistem em um sistema de leis de balanço hiperbólicas amplamente usadas para modelar o fluxo de água no caso de canais abertos [1] e são objeto de estudo deste trabalho. Tais equações diferem da forma descrita por (1) pela presença de termos fonte na parte homogênea à direita, relativos à interação do fluido com o fundo do canal e com as paredes e ao atrito presente durante o escoamento. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}$ o domínio de um canal unidimensional no qual um dado fluido incompressível escoa em um intervalo de tempo $I = (t_0, T)$. Nessas condições, as equações de Saint-Venant são dadas por:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \qquad \text{em } \Omega \times I, \tag{2a}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{A} + gI_1\right) = gI_2 - gA\left[\frac{\partial z_b}{\partial x} + S_f\right] \quad \text{em } \Omega \times I, \tag{2b}$$

em que $x \in \Omega$ e $t \in I$ são, respectivamente, as variáveis espacial e temporal, $A(x,t)$ (m^2) é a área molhada da seção transversal do canal no ponto x, $Q(x,t)$ (m^3/s) a vazão volumétrica de fluido nessa seção, g ($\mathrm{m/s}^2$) a magnitude da aceleração da gravidade. Os termos $I_1(\mathrm{m}^3)$ e $I_2(\mathrm{m}^2)$

[1] l239956@dac.unicamp.br
[2] t224831@dac.unicamp.br
[3] mrcorrea@unicamp.br

computam, respectivamente, as forças devido à pressão hidrostática e à pressão exercida pelas paredes do canal, e são dados por:

$$I_1 = \int_0^{h(x,t)} (h-y)b(x,y)\mathrm{d}y; \quad I_2 = \int_0^{h(x,t)} (h-y)\frac{\partial b(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}y, \tag{3}$$

em que $b(x,y)$(m) é a largura do canal em um corte transversal no ponto x a uma altura y do leito.

Finalmente, $z_b(x)$ (m) se refere à cota do fundo do canal e S_f (m/m) é o termo de fricção, dado por:

$$S_f = \frac{n^2|Q|}{A^2R^{4/3}}Q, \tag{4}$$

onde n é o coeficiente de rugosidade de Manning cuja unidade SI é s/m$^{1/3}$ e R é o raio hidráulico (área da seção transversal molhada dividida pelo perímetro molhado). As equações (2a) e (2b) podem ser reescritas como o seguinte sistema hiperbólico:

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = \mathbf{S}(\mathbf{u}), \tag{5}$$

com: $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} A & Q \end{bmatrix}^T$; $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} Q & \dfrac{Q^2}{A} + gI_1 \end{bmatrix}^T$ e $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & gI_2 - gA\left(Sf(A,Q) - \dfrac{\partial z_b}{\partial x}\right) \end{bmatrix}^T$.

A parte computacional do projeto consiste na implementação de Esquemas de Elementos Finitos do tipo Galerkin Descontínuo e Esquemas de Volumes Finitos Centrais para resolver numericamente o sistema (5) e na simulação de problemas práticos de escoamento. Para aplicações em canais de seção transversal retangular não uniforme, visamos implementar o esquema central semidiscreto apresentado por [3], de segunda ordem, bem-balanceado, que preserva regimes estacionários em repouso.

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Dr. Maicon Ribeiro Correa e seus orientandos Robson Júnior e Ana Valentim pelo acompanhamento da Iniciação, à FAPESP pelo apoio financeiro (processo Nº 2023/01011-8) e ao Grupo de Pesquisa e Ação em Conflitos, Riscos e Impactos Associados a Barragens (CRIAB), ao qual este projeto está associado, pela contribuição teórica e computacional para o desenvolvimento deste trabalho.

Referências

[1] Abdul A Khan e Wencong Lai. **Modeling shallow water flows using the discontinuous Galerkin method**. CRC Press New York, 2014. ISBN: 9780429157936. DOI: `10.1201/b16579`.

[2] Randall J LeVeque et al. **Finite volume methods for hyperbolic problems**. Vol. 31. Cambridge university press, 2002. ISBN: 9780511791253. DOI: `10.1017/CBO9780511791253`.

[3] Jorge Balbás e Smadar Karni. "A central scheme for shallow water flows along channels with irregular geometry". Em: **ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis** 43.2 (2009), pp. 333–351. DOI: `10.1051/m2an:2008050`.