Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Série Generalizada de Dirichlet por Mittag-Leffler

Matheus Tobias Mendonça[1]
UFJF, Juiz de Fora, MG
Sandro Rodrigues Mazorche[2]
Departamento de Matemática - UFJF, Juiz de Fora, MG

No artigo de Chandrasekhar e Munch [1], foram conduzidos estudos minuciosos sobre a equação (1). Ao considerar $0 < p < 1$ e $g(0) = 0$, conseguindo demonstrar a existência de uma solução única para essa equação que descreve as flutuações no brilho da Via Láctea.

$$g'(u) + g(u) = \frac{1}{p} g\left(\frac{u}{p}\right) \tag{1}$$

A solução dessa equação é dada pela série generalizada de Dirichlet, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$, onde $\{\lambda_n\}$ é uma sequência estritamente crescente tendendo ao infinito com $\lambda_n \geq 0$ e $s \in \mathbb{C}$. Tomando $g(u)$ e sua derivada $g'(u)$, como descritos na equação (2), onde $\lambda_n = \frac{1}{p^n}$, $p \in (0, 1)$.

$$g(u) = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n t}; \quad g'(u) = \sum_{n=0}^{\infty} -\lambda_n A_n e^{-\lambda_n t} \tag{2}$$

Seguindo as contas de [1] para resolver a equação (1), onde utilizando (2) em (1), obtemos

$$\begin{array}{rcl} \sum_{n=0}^{\infty} A_n (\frac{-1}{p^n}) e^{-\frac{1}{p^n} u} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\frac{1}{p^n} u} & = & \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} A_{n-1} e^{-\frac{1}{p^n}(\frac{u}{p})} \\ \sum_{n=0}^{\infty} A_n \big(-\frac{1}{p^n} + 1 \big) e^{-\frac{1}{p^n} u} & = & \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\frac{1}{p^{n+1}} u} \\ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \big(-\frac{1}{p^n} + 1 \big) e^{-\frac{1}{p^n} u} & = & \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{\infty} A_{n-1} e^{-\frac{1}{p^n} u} \end{array} \tag{3}$$

Portanto, é fácil ver que, $A_n(\dfrac{p^n - 1}{p^n}) = \dfrac{1}{p} A_{n-1}$, com $n = 1, 2, ...$ Usando a recursividade temos

$$A_n = A_0 (-1)^n \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{p^k}{1 - p^k} \right) \frac{1}{p^n} \quad , \quad k = 1, 2, ... \tag{4}$$

onde A_0 é uma constante arbitrária $A_0 = \frac{1}{\prod_{i=1}^{\infty}(1 - p^i)}$, assumindo a condição $\int_0^{\infty} g(u) du = 1$.

Diversos estudos têm empregado o cálculo fracionário para abordar a resolução da equação (1) no sentido fracionário. Para isso, seguem as ideias de Tossio Kato [3], que realizou uma investigação minuciosa da equação (1) no sentido clássico, porem considerando $\lambda < 1$ e $g(0) = 1$. Desta forma, muitos autores como por exemplo, Manuel Duarte Ortigueira e Gabriel Bengochea [2] contribuíram com um estudo do caso fracionário da equação (1) no qual utilizam as mesmas condições de [3], para resolver a equação (1) de forma fracionária. A solução dada por eles está correta, porém é importante ressaltar que as condições descritas em [1] diferem dessas abordagens, desta forma propomos resolver a equação (1) respeitando o máximo das condições descritas no trabalho de [1].

Desta forma propomos trocar a exponencial pela função de Mittag-Leffler, obtendo uma série generalizada de Dirichlet por Mittag-Leffler. Tomando ${}^cD^{\alpha} g(u)$ como a derivada fracionária segundo Caputo, usando a definição dada em [4], em que ${}^cD^{\alpha}\{E_{\alpha}(\lambda t^{\alpha})\} = \lambda E_{\alpha}(\lambda t^{\alpha})$, temos ${}^cD^{\alpha}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} -\lambda_n A_n E_{\alpha}(-\lambda_n u^{\alpha})$. Assim reescrevendo a equação (1), utilizando a derivada fracionária de Caputo, obtemos

$${}^cD^{\alpha} g(u) + g(u) = \tfrac{1}{p^{\alpha}} g(\tfrac{u}{p}). \tag{5}$$

---

[1]tobias@ice.ufjf.br
[2]sandro.mazorche@ufjf.br

Resolvendo a equação (5) de forma análoga

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n\left(\frac{-1}{p^{n\alpha}}\right)E_\alpha\left(-\frac{1}{p^{n\alpha}}u^\alpha\right) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n E_\alpha\left(-\frac{1}{p^{n\alpha}}u^\alpha\right) = \frac{1}{p^\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} A_n E_\alpha\left(-\frac{1}{p^{n\alpha}}\left(\frac{u}{p}\right)^\alpha\right) \qquad (6)$$

e pela recursividade temos a relação $A_n = A_0(-1)^n \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{p^{\alpha k}}{1-p^{\alpha k}}\right)\frac{1}{p^{\alpha n}}$. Desta forma a solução é

$$g^c(u) = A_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{p^{\alpha k}}{1-p^{\alpha k}}\right)}{p^{\alpha n}} E_\alpha\left(-\left(\frac{u}{p^n}\right)^\alpha\right) \qquad (7)$$

Assumiremos A_0 com um valor similar do caso clássico, dado por $A_0 = \frac{1}{\prod_{i=1}^{\infty}(1-p^{\alpha i})}$. A condição $g^c(0) = 0$ é trivial de se obter, e apresenta características similares a equação clássica, enquanto $\int_0^\infty g^c(u)du = 1$, não é um resultado tão fácil assim e precisará de um estudo mais detalhado. Assim analisamos o comportamento das soluções das equações (1) e (5) onde $g(u)$ é dado pela série generalizada de Dirichlet e $g^c(u)$ pela série generalizada de Dirichlet por Mittag-Leffler. A Figura 1 mostra que são similares, porém a $g^c(u)$ apresenta o efeito da cauda pesada que é uma das características das função de Mittag-Leffler.

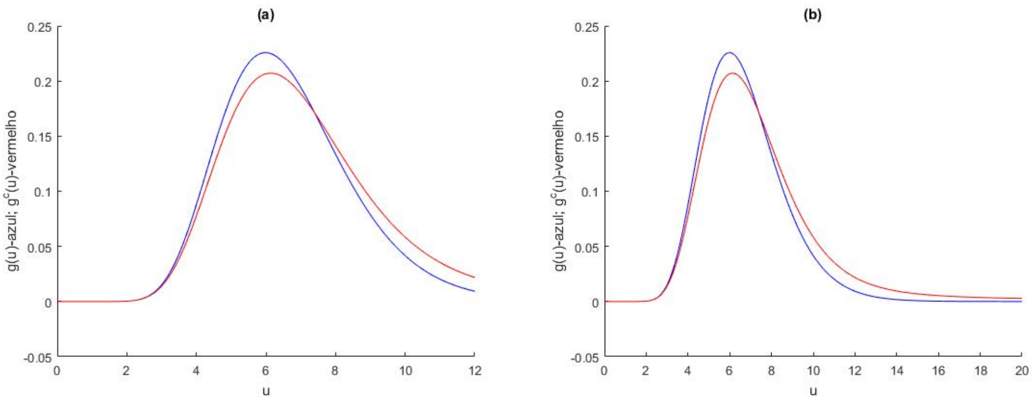

Figura 1: Gráficos gerados no Matlab/Octave.

Agradecimentos

Agradecemos o apoio do PPGM-UFJF e da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-Brasil(CAPES).

Referências

[1] C. Chandrasekhar e G. Münch. **The theory of the fluctuations in brightness of the Milky Way. I-II**. 112ª ed. Astrophysical Journal, 1950.

[2] M.D. Ortigueira e G.Bengochea. "A Simple Solution for the General Fractional Ambartsumian Equation". Em: **Applied Sciences, 13, 871.** (2023).

[3] T. Kato e J. McLeod. **The functional-differential equation**. Vol.77.6. American Mathematical Society, 1971.

[4] E. C. Oliveira. **Solved Exercises in Fractional Calculus**. Volume 240. São Paulo: Springer, 2019. ISBN: 978-3-030-20524-9.