

Um Método de Volumes Finitos Não-linear com Método Iterativo Quase-Newton para Solução do Campo de Pressão em Meios Porosos Altamente Heterogêneos e Anisotrópicos

Emanoel R. Santos¹
Matheus A.Chaves²
Fernando R. L. Contreras³
NT-CAA/UFPE, Caruaru,PE

A equação de difusão (equação de pressão) em meios porosos altamente heterogêneos e anisotrópicos aparece em uma ampla gama de aplicações na engenharia, a exemplo de fenômenos como: propagação de calor, escoamento de fluidos em reservatórios de petróleo ou ainda na simulação de aquíferos. Esses processos, a partir de leis de conservação, são regidos por princípios matemáticos que descrevem a difusão de massa, energia ou de fluidos através de meios porosos ou contínuos. Esses fenômenos físicos são matematicamente descritos por equações que envolvem um operador elíptico com um coeficiente difusivo, que pode ser, em geral, altamente heterogêneo e anisotrópico, o qual pode representar grandes desafios para o projeto e análise teórica de métodos numéricos precisos, acurados e eficientes computacionalmente.

A solução analítica desse tipo de equações pode ser inexistente, devido à complexidade do meio poroso em geral. A partir desta perspectiva, a simulação e gerenciamento de aquíferos é um exemplo marcante de demanda por soluções que envolvem tecnologias avançadas, onde o uso de modelagem computacional com metodologias robustas e sofisticadas é fundamental para a solução dessas equações [3]. Seguindo o apresentado por [4][5][6], um método numérico ideal para a discretização do operador elíptico, como o caso da equação de pressão, deve atender, pelo menos, os seguintes critérios: ser localmente conservativo, manter soluções positivas ao atender ou Princípio do Máximo Discreto (DMP), além de preservar a linearidade.

Assim, para a simulação numérica dos problemas de difusão (equação de pressão ou calor), o método de volumes finitos se tornou um dos métodos mais comumente utilizados devido à sua simplicidade e capacidade de representação de certas condições físicas tanto no nível local quanto global. No presente trabalho, modela-se numericamente a distribuição dos campos de pressão em meios porosos, onde o cálculo deste campo é feito a partir da solução de sistemas não lineares. A solução destes sistemas depende do cálculo da matriz jacobiana presente em cada iteração do método iterativo (neste caso, método iterativo de Broyden [2]). O aumento de eficiência computacional em métodos iterativos é de grande interesse, devido ao alto custo computacional presente neste processo.

Em métodos iterativos tipo Quase-Newton, o cálculo da matriz jacobiana discreta é frequentemente obtida a partir do método das diferenças finitas. Este tipo de abordagem pode se tornar muito caro computacionalmente quando tratamos domínios computacionais altamente refinados. A estratégia adotada consiste em utilizar partições que possam reduzir a quantidade de interações do método de Broyden no nosso contexto [8]. Dessa forma, a estratégia de partição é utilizada de

¹emanoel.rsantos@ufpe.br

²matheus.araujochaves@ufpe.br

³fernando.raul@ufpe.br

modo que nenhuma informação contida na matriz padrão (pattern matrix) seja perdida. A partição consiste no agrupamento dos valores internos não-nulos presentes na matriz jacobiana original ou clássica, enquanto os valores iguais a zero não farão parte do nosso processo iterativo (sparse matrix). Ao fim da execução, a matriz jacobiana deve retornar à sua forma original, chamada de matriz padrão. Sabe-se que o método de Broyden se torna bastante eficiente computacionalmente e aplicável na resolução de sistemas de equações não lineares muito grandes. A estratégia utilizada nesse trabalho aperfeiçoa a sua eficiência computacional, tornando-o competitivo com o desempenho numérico de outros métodos iterativos desenvolvidos na literatura, como o método iterativo de Picard e o de Picard-Anderson [7][1].

A validação do método numérico se dá através da resolução de diversos problemas “benchmarks” presentes na literatura, utilizando algumas categorias de malhas estruturadas e com parâmetros geométricos determinados, no qual é possível analisar a determinada influência da estratégia adotada na acurácia e no tempo de resolução do método de volumes finitos. Ao realizar os testes complementares, foi possível verificar a diminuição no tempo computacional e o número de interações nas simulações.

Agradecimentos

Agradecemos ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Fundação de Amparo a Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco (FACEPE).

Referências

- [1] D. G. Anderson. “Iterative Procedures for Nonlinear Integral Equations”. Em: **Journal of the ACM** 12 (1965), pp. 547–560. DOI: <https://doi.org/10.1145/321296.321305>.
- [2] C. G. Broyden. “A Class of Methods for Solving Nonlinear Simultaneous Equations”. Em: **Mathematics of Computation** 92 (1965), pp. 577–593.
- [3] D. K. E. Carvalho. “Uma Formulação do Método dos Volumes Finitos com Estrutura de Dados por Aresta para a Simulação de Escoamentos em Meios Porosos”. Tese de doutorado. Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), 2005.
- [4] F. R. L. Contreras, P. R. Lyra e D. K. E. Carvalho. “A new multipoint flux approximation method with a quasi-local stencil (MPFA-QL) for the simulation of diffusion problems in anisotropic and heterogeneous media”. Em: **Applied Mathematical Modelling** 70 (2019), pp. 659–676.
- [5] R. R. Ewing. **The mathematics of reservoir simulation**. SIAM, 1983.
- [6] K. Lipnikov et al. “Monotone finite volume schemes for diffusion equations on unstructured triangular and shape-regular polygonal meshes”. Em: **Journal of Computational Physics** 227 (2007), pp. 492–512.
- [7] E. Picard. **Traité d’analyse**. Gauthier-Villars et fils, 1901.
- [8] R. C. Werner. **Methods for solving systems of nonlinear equations**. SIAM, 1998.