Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Álgebras de Jordan Formalmente Reais e Cones Simétricos.

Marjenny Rodríguez[1] Joelma Morbach[2]
UFPA, Belém, PA

Neste trabalho buscaremos apresentar as noções sobre Álgebras de Jordan formalmente reais e sua relação com cones simétricos. Usaremos a definição de álgebra sobre um corpo a partir de um espaço vetorial e depois mostraremos algumas definições importantes sobre o tema para condicionarmos o entendimento da aplicação baseada em [1], [2] e [3].

Definição 0.1 (Álgebra Sobre um Corpo $\mathbb{K}$). *Seja A um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ onde está definida uma operação $\cdot$ que satisfaz, para todo $x, y \in A$ e $\alpha \in \mathbb{K}$,*

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \tag{1}$$

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \tag{2}$$

$$\alpha(x \cdot y) = (\alpha x) \cdot y = x \cdot (\alpha y). \tag{3}$$

Nestas condições, A é dita uma $\mathbb{K}$-álgebra ou simplesmente uma álgebra.

Dizemos que A será uma álgebra associativa se seu produto for associativo assim como A será comutativa se seu produto for comutativo.

Definição 0.2 (Álgebra de Jordan). *Uma $\mathbb{K}$-álgebra $\mathcal{J}$ é dita Álgebra de Jordan se seu produto satisfaz a condição de comutatividade $xy = yx$, para todo $x, y \in \mathcal{J}$, e também satisfaz o que chamamos de identidade de Jordan, dada por*

$$(x^2 y)x = x^2(yx), \tag{4}$$

para todo $x, y \in \mathcal{J}$.

Entre as classificações de álgebras de Jordan, trabalharemos em cima de uma em particular que são as Álgebras de Jordan Formalmente Reais.

Definição 0.3 (Álgebras de Jordan Formalmente Reais). *Uma álgebra de Jordan é formalmente real se*

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0 \Rightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0, \tag{5}$$

para x_i pertencentes à álgebra de Jordan.

Quando lidamos com uma álgebra B não associativa, podemos definir um novo produto chamado produto de jordan dado por

$$x \odot y = \frac{1}{2}(x \cdot y + y \cdot x) \tag{6}$$

[1]marjennyrdm@gmail.com
[2]joelmam@ufpa.br

onde $x, y \in B$ e $\cdot$ está representando o produto usual de B.

Chamamos uma álgebra de Jordan $\mathcal{J}$ formalmente real de $\mathcal{JH}$-álgebra se ela for um espaço de Hilbert onde o produto interno é associativo. Podemos encontrar mais classificações em [2].

Definição 0.4 (Álgebras de Jordan Euclidianas)**.** *Dada uma álgebra de Jordan $\mathcal{J}$ onde está definido em seu espaço vetorial um produto interno $< .,. >$. Chamamos $\mathcal{J}$ de álgebra de Jordan Euclidiana se*

$$< x \cdot y, z >=< x, y \cdot z >, \forall x, y, z \in \mathcal{J}. \tag{7}$$

Definição 0.5 (Cones em um Espaço Vetorial)**.** *Se V é um espaço vetorial, um subconjunto C não-vazio é um cone em V se $C + C \subset C$ e $\alpha C \subset C$ para todo $\alpha > 0$.*

Diremos que um cone é aberto se C for um conjunto aberto. Mais precisamente, usaremos o fato de que se C é aberto, então $int\overline{C} = C$, onde $\overline{C}$ é o fecho de C.

Definição 0.6 (Cones Simétricos)**.** *Se V é um espaço de Hilbert com produto interno, um cone aberto Ω em V é dito simétrico se apresenta Autodualidade, isto é, $\Omega = \{v \in V / \langle v, x\rangle > 0, \forall x \in \overline{\Omega} - \{0\}\}$, e Homogeneidade, ou seja, dados $x, y \in \Omega$, existe um isomorfismo contínuo $g : V \to V$ tal que $g(x) = y$.*

Em dimensões finitas, o interior de um cone da forma $\{x^2/x \in \mathcal{J}\}$ em uma álgebra de Jordan é sempre simétrico. Além disso, veremos também que se $\mathcal{J}$ é uma álgebra de Jordan formalmente real de dimensão finita, então C é um cone convexo aberto regular autodual pontiagudo homogêneo, ou seja, a categoria de cones convexos aberto autoduais regulares homogêneos pontiagudos é equivalente à categoria de álgebras de Jordan formalmente reais de dimensão finita. Como vemos em [1], podemos relacionar o estudo de cones simétricos com uma álgebra não associativa sobre os reais.

Por definição, uma álgebra de Jordan é dita simples se seus únicos ideiais possíveis são os ideais triviais e um cone simétrico é dito irredutível se não é o produto direto de dois ou mais cones simétricos. Em [1] vemos que um cone simétrico é irredutível se e somente se a álgebra de Jordan Euclidiana associada for simples. Uma álgebra de Jordan euclidiana se decompõe como uma soma direta de ideais simples e um cone simétrico se decompõe como uma soma direta de cones simétricos irredutíveis.

A aplicação de álgebras de Jordan na Mecânica Quântica se dá em representar observáveis através de operadores hermitianos, essa representação é feita termos dos cones simétricos - a menos de isomorfismo, os cones simétricos irredutíveis dividem-se em quatro famílias dos chamados cones clássicos juntamente com um outro cone que se diz ser excepcional.

Uma outra grande descoberta sobre as álgebras de Jordan é que podemos usá-las em uma decomposição espectral para cones simétricos aplicados em programação não linear, mais detalhes podem ser vistos em [3]. Focaremos em usar cones simétricos associados a álgebra de Jordan e aplicar em programações quadráticas, mas isso deixaremos para a apresentação.

Referências

[1] C. A. Brito. **Álgebras de Jordan e Cones Simétricos**. 2021.

[2] K. McCrimmon. **A Taste Of Jordan Algebras**. Springer, 2004.

[3] D. S. Viana. **Condições de Otimalidade para Otimização Cônica**. Universidade de São Paulo, 2019.