Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Propriedades assintóticas para soluções do sistema MHD incompressível

Juliana R. Nunes[1]
FURG, Rio Grande, RS

Por volta de 1920, começou o estudo da área conhecida como Magneto-Hidrodinâmica (MHD). Área que estuda a interação entre campos magnéticos e fluidos em movimento. Estes campos magnéticos influenciam fluidos naturais como por exemplo a formação das nuvens, estrelas e manchas solares, e também, os produzidos pelos homens, como o aquecimento dos metais líquidos. A ideia é que campos magnéticos afetam o movimento dos fluidos e tais fenômenos, por sua vez, modificam o campo magnético novamente. O sistema MHD aplica-se em diversas áreas, como geofísica, física nuclear, engenharia e matemática.

Neste trabalho foi estudado o sistema MHD incrompressível em dimensões $2 \leq n \leq 4.$, dado por

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} + \nabla p = \mu\Delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{b}_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{b} = \nu\,\Delta\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{u}, \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}(\cdot,t) = 0, \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{b}(\cdot,t) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

onde $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x,t)$ denota a velocidade do fluido, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(x,t)$ o campo magnético e $p = p(x,t)$ a pressão total do fluido. E ainda, $\mu > 0$ conhecida como constante cinemática, $\nu > 0$ constante de difusão magnética e $(\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{b}_0) \in \boldsymbol{L}^2_\sigma(\mathbb{R}^n)\times\boldsymbol{L}^2_\sigma(\mathbb{R}^n)$ dados iniciais, onde $\boldsymbol{L}^2_\sigma(\mathbb{R}^n) = \{\mathbf{v} \in \ \boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^n) : \nabla\cdot\mathbf{v} = 0, \text{ no sentido das distribuições}\}$.

Começamos investigando o problema assintótico de Leray [1] para essas equações e a partir da prova generalizamos este resultado, analisando o comportamento das soluções em outras normas e estendendo para suas derivadas de ordem m, resultados que podem ser visto com detalhes em [2, 3]. Para o problema acima em dimensão $n = 2$, tem-se a existência e unicidade de solução clássica, a prova foi dada por Sermange e Teman [4]. Já o caso em que a dimensão é $n = 3$, essa questão segue em aberto. Muitos autores investigam existência e unicidade de soluções em MHD, alguns resultados podem ser encontrados em [5–9]. É interessante observar que sem o campo magnético em nosso sistema, temos as equações de Navier-Stokes, existindo assim uma analogia entre o estudo dessas equações. Para conhecer alguns resultados sobre as equações de Navier-Stokes, pode-se consultar [10–14]. O objetivo principal deste trabalho foi investigar resultados de decaimento assintótico para as soluções do sistema. Foi utilizada a técnica desenvolvida em [15] para as equações de Navier-Stokes. Obtemos, assim, a seguinte propriedade: para $\alpha \geq 0$ e $m \geq 0$ qualquer, sempre que $\limsup_{t\to\infty} t^\alpha \|(\boldsymbol{u},\boldsymbol{b})(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty$, tem-se

$$\lim_{t\to\infty}\sup t^{\alpha+\frac{m}{2}}\|(D^m\boldsymbol{u}, D^m\boldsymbol{b})(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq K(\alpha,m)C^{-m/2}\lim_{t\to\infty}\sup t^\alpha\|(\boldsymbol{u},\boldsymbol{b})(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \tag{2}$$

para $C = \min\{\mu,\nu\}$ e $2 \leq n \leq 4$.
Essa propriedade foi chamada de desigualdade fundamental e foi bastante importante para o tra-

[1]juliana.s.ricardo@gmail.com

balho, pois melhorou as taxas de decaimento obtidas anteriormente, sua demonstração pode ser encontrada em [2]. Alguns resultados da tese [2] foi publicado em [3].

Agradecimentos

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Referências

[1] J. Leray. **Essai sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'espace**. 63ª ed. France: Acta Math, 1934.

[2] R. N. Juliana. "Decaimento assintótico de soluções das equações de magneto-hidrodinâmica incompressível em Rn". Tese de doutorado. UFRGS, 2018.

[3] J. Nunes, C. Perusato, R. Guterres e W. Melo. "Large Time Decay for the Magnetohydrodynamics System in Hs(Rn)". Em: **Acta Applicandae Mathematicae** 126 (2019).

[4] J. Sermange e R. Temam. "Some mathematical questions related to the MHD equations". Em: **Comm. Pure Appl. Math,** 36 (1983), pp. 635–664.

[5] C. He e Z. Xin. "On the regularity of weak solutions to the magnetohydrodynamic equations". Em: **Journal of Differential Equations,** 213 (2005), pp. 235–254.

[6] J. Beale, T. Kato e A. Majda. "Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations". Em: **Communications in Mathematical Physics** 94 (1984), pp. 61–66.

[7] J. Yuan. "Existence theorem and regularity criteria for the generalized MHD equations," em: **Nonlinear Analysis. Real World Applications.** 11 (2010), pp. 1640–1649.

[8] M. Schonbek, T. Schonbek e E. Suli. "Large-time behaviour of solutions to the magnetohydrodynamics equations". Em: **Math. Ann** 304 (1996), pp. 717–756.

[9] Y. Zhou. "Remarks on regularities for the 3D MHD equations." Em: **Discrete and Continuous Dynamical Systems.** 12 (2005), pp. 881–886.

[10] H. Fujita e T. Kato. "On the Navier-Stokes initial value problem". Em: **Arch. Rat. Mech. Anal,** 16 (1964), pp. 269–315.

[11] H. Kreiss e J. Lorenz. "Initial-boundary value problems and the Navier-Stokes equations". Em: **Academic Press** (1989).

[12] H. Kreiss, J. Lorenz, P. Zingano e Hagstrom. T. "Decay in time of incompressible flows". Em: **J. Math. Fluid Mech,** 5 (2003), pp. 231–244.

[13] J. Zingano, L. Schutz e P. Zingano. "On the supnorm form of Leray's problem for the incompressible Navier-Stokes equations". Em: **J. Math.Phys** 7 (2015), pp. 1–15.

[14] M. Wiegner. "Decay results for weak solutions of the Navier-Stokes equations on Rn". Em: **Journal of the London Mathematical Society.** 35 (1987), pp. 303–313.

[15] J. Zingano, J. Lorenz, P. Zingano e Hagstrom. T. "An inequality for solutions of the Navier-Stokes equations in Rn". Em: **arxiv.1707.00094** (2017).