

Seções de Poincaré do Problema Restrito de Três Corpos

Julia Gomes da Costa,¹ Priscilla A. de Sousa-Silva²
 UNESP - Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
 Faculdade de Engenharia - Câmpus de São João da Boa Vista
 São João da Boa Vista, SP, Brasil

Atualmente, o projeto de missões espaciais modernas tem demandado a utilização de modelos de n -corpos, como o *Problema Restrito de Três Corpos* (PRTC). Com isso, as agências espaciais se propõem a estabelecer novos perfis de missão com objetivos mais desafiadores, ao mesmo tempo que buscam minimizar o uso de combustível [1].

O PRTC modela a dinâmica de um corpo de massa infinitesimal, sob a influência de forças gravitacionais oriundas de outros dois corpos, conhecidos como primários P_1 e P_2 , de massas m_1 e m_2 . Nesse modelo, o movimento dos primários não sofre influência do corpo de massa infinitesimal. Sendo assim, P_1 e P_2 movem-se em órbitas circulares em torno do baricentro desse sistema binário em razão da influência mútua das forças gravitacionais que um primário exerce sobre o outro [2].

No caso planar do PRTC, as trajetórias dos primários e do corpo de massa infinitesimal estão restritas ao plano x - y . Considerando variáveis adimensionais e um referencial com origem no baricentro dos primários que gira com os primários com respeito a um referencial inercial, o movimento do corpo de massa infinitesimal é dado por um sistema de duas equações de segunda ordem:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} &= \Omega_x, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \Omega_y,\end{aligned}\tag{1}$$

onde Ω_x e Ω_y denotam as derivadas parciais do potencial efetivo

$$\Omega(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{\mu(1-\mu)}{2}\tag{2}$$

com respeito às coordenadas espaciais [2].

O sistema de equações (1) tem cinco pontos de equilíbrio. Três deles, L_1 , L_2 e L_3 , localizados no eixo x e denominados de soluções colineares não instáveis. Os outros dois, L_4 e L_5 , se localizam no plano x - y nos vértices de triângulos equiláteros formados com os primários [2].

Uma vez que o PRTC é um sistema dinâmico que exibe uma ampla gama de comportamentos, incluindo órbitas periódicas, *quasi-periódicas* e regiões caóticas, são necessárias ferramentas diversas para explorar e visualizar esses comportamentos.

Nesse contexto, seções de Poincaré são uma das ferramentas usadas para analisar a dinâmica do PRTC [3]. Uma seção de Poincaré é um gráfico da interseção da trajetória do sistema com uma superfície bidimensional especificada. A seção Poincaré mostra como o sistema evolui ao longo do tempo e fornece informações sobre seu comportamento de longo prazo, dessa forma é possível analisar a dinâmica de um sistema de tempo contínuo em termos de um mapeamento discreto obtido ao construir numericamente uma seção de Poincaré. Esses mapeamentos preservam as propriedades das órbitas periódicas e *quasi-periódicas* do sistema original e apresentam espaço de

¹jg.costa@unesp.br

²priscilla.silva@unesp.br

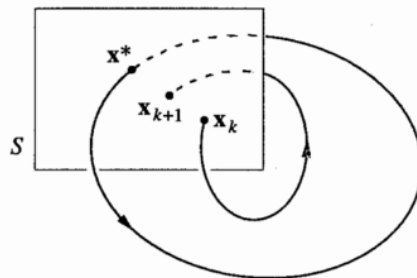


Figura 1: Exemplo esquemático de um Mapa de Poincaré. FONTE: [5]

estado de dimensão mais baixa, simplificando a análise e caracterização das estruturas dinâmicas de interesse [4, 5].

Seja um sistema com espaço de fases n -dimensional $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ e seja S uma hiper-superfície de dimensão $n - 1$ transversal ao fluxo. O mapa de Poincaré é um mapeamento de S em S obtido pela interseção sucessiva das trajetórias do sistema com a superfície [5]. Se $\mathbf{x}_k \in S$ denota a k -ésima interseção de uma trajetória com S , então o mapa de Poincaré é dado por $\mathbf{x}_{k+1} = P(\mathbf{x}_k)$, conforme ilustrado na Figura 1. Nessa figura, o ponto \mathbf{x}^* indica um ponto fixo do sistema, isto é, um ponto para o qual $P(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$ e que corresponde a uma solução periódica do sistema de tempo contínuo.

Neste trabalho, construímos numericamente mapas de Poincaré do PRTC como um passo preliminar para investigar os mecanismos de transporte relacionados às variedades invariantes hiperbólicas associadas às órbitas periódicas desse sistema. Inicialmente, consideraremos as seções $\Sigma_1 = \{(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \mid x = x_{L_1}, y > 0, \dot{x} > 0\}$ e $\Sigma_2 = \{(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \mid x = x_{L_1}, y > 0, \dot{x} < 0\}$ que permitem investigar trajetórias periódicas no entorno do ponto L_1 , localizado em $(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = (x_{L_1}, 0, 0, 0)$. Este é um passo importante para futuras aplicações na obtenção de possíveis órbitas de estacionamento para plataformas espaciais e transferências de baixa energia no Sistema Solar.

Agradecimentos

FAPESP Processo 2023/01809-0. PROGRAD-Unesp. CAPES – Código de Financiamento 001.

Referências

- [1] Wang Sang Koon. **Dynamical Systems, the Three-Body Problem And Space Mission Design**. Marsden Books, 2011.
- [2] V. Szebehely. **practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems**. New York: Springer-Verlag New York, Inc., 1967.
- [3] Marian Gidea, Frederick Deppe e Gregory Anderson. “Phase space reconstruction in the restricted three-body problem”. Em: **AIP Conference Proceedings** 886.1 (2007), pp. 139–152. DOI: 10.1063/1.2710051.
- [4] T.S. Parker e L.O. Chua. **Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems**. 1st. New York: Springer-Verlag, 1989.
- [5] Steven H. Strogatz. **Nonlinear Dynamics and Chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering**. Massachusetts: Perseus Books, 1994.