Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Equações Diferenciais *g-Fuzzy*: Investigação de Soluções não gH-diferenciáveis

Felipe Longo[1] João F. C. A. Meyer[2]
IMECC/UNICAMP, Campinas, SP
Beatriz Laiate[3]
IFES, Serra, ES
Marta C. Gadotti[4]
IGCE/UNESP, Rio Claro, SP

Na aritmética de números fuzzy, a diferença generalizada existe para qualquer par de números fuzzy [1], o que não ocorre com as diferenças gH [2] e LgH [3]. Como consequência direta, o espaço de funções fuzzy g-diferenciáveis é muito mais amplo e complexo do que o das funções gH-diferenciáveis. Neste trabalho, denominaremos uma Equação Diferencial Fuzzy sob a derivada generalizada de *equação diferencial g-fuzzy*.

Porém, o processo inverso da diferenciação não é tão simples, isto é, encontrar uma função g-diferenciável que resulte na função dada não é uma tarefa fácil em geral. Esse fato reflete também no estudo das equações diferenciais fuzzy, surgindo o objeto de investigação deste trabalho: quais condições devemos impor para obter soluções para uma equação diferencial g-fuzzy que não seja gH- ou gH$*$-diferenciável?

Na ausência de um Teorema Fundamental do Cálculo envolvendo a g-derivada, o início desta investigação será dado através de exemplos simples de equações que podem e que não podem satisfazer o desejado.

Dados $A, B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, a diferença generalizada (diferença g) é dada, nos α-níveis, por

$$[A -_g B]_\alpha = \left[\inf_{\beta \geq \alpha} \min\left(a_\beta^- - b_\beta^-, a_\beta^+ - b_\beta^+\right), \sup_{\beta \geq \alpha} \max\left(a_\beta^- - b_\beta^-, a_\beta^+ - b_\beta^+\right)\right],$$

onde $[A]_\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+]$ e $[B]_\alpha = [b_\alpha^-, b_\alpha^+]$ (veja [1]).

Definição 0.1. *[2] Sejam $t_0 \in I \subset \mathbb{R}$ e h tais que $t_0 + h \in I$, então a derivada g de uma função $F : I \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ em t_0 é definida por*

$$F_g'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\Big(F(t_0 + h) -_g F(t_0)\Big). \tag{1}$$

Se $F_g'(t_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ satisfazendo (1) *existir, dizemos que F é* generalizada diferenciável *(g-diferenciável) em t_0.*

Considerando a equação diferencial g-fuzzy $x_g'(t) = F(t, x(t))$, como a g-derivada generaliza as derivadas gH e a gH$*$ (a derivada gH$*$ generaliza a derivada gH), segue que as soluções dos

[1]longo@ime.unicamp.br (Bolsista CNPq processo 140692/2020-7)
[2]jmeyer@unicamp.br
[3]beatrizlaiate@gmail.com
[4]mc.gadotti@unesp.br

problemas com essas derivadas são soluções para a equação com derivada g. Além disso, algumas equações não possuem solução que não seja gH$*$.

Por exemplo, a equação diferencial $x'_g(t) = A$, onde $[A]_\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+]$ e a_α^- e a_α^+ são funções injetivas de $\alpha \in [0,1]$, não possui solução que não seja gH$*$-diferenciável. Outro exemplo, pelo que as contas em andamento indicam, é o modelo malthusiano $x'_g(t) = \lambda x(t)$.

Por outro lado, um exemplo de equação que possui solução que não é gH$*$-diferenciável é dada por $x'_g(t) = [a,b]$. De fato, seja $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ dadas em níveis por

$$[x(t)]_\alpha = \left[x_\alpha^-(t), x_\alpha^+(t)\right] = \left[(\alpha-1)e^{-t} + at + 2, (1-\alpha)e^{-t} + bt + 3\right], \ \forall \alpha \in [0,1]. \qquad (2)$$

Temos que $a = (x_1^-)'(t) < (x_\alpha^\pm)'(t) < (x_1^+)'(t) = b$. Logo, $x(t)$ não é gH$*$-diferenciável e $x'_g(t) = [a,b]$.

Outro exemplo é dado por $x'_g(t) = r[x(t)]_1$. Com efeito, considerando $r > 0$ e a solução no nível 1 dada por $x_1^-(t) = x_1^-(0)e^{rt}$ e $x_1^+(t) = x_1^+(0)e^{rt}$, segue que $x_\alpha^-(t) = x_1^-(t)\,(c_1(\alpha-1)e^{-\mu t}+1)$ e $x_\alpha^+(t) = x_1^+(t)\,(c_2(\alpha-1)e^{-\mu t}+1)$ satisfazem $(x_1^-)'(t) < (x_\alpha^\pm)'(t) < (x_1^+)'(t)$ para todo $\alpha \in [0,1]$ desde que $r < \mu \leq r\left(\frac{x_1^+(0) - x_1^-(0)}{\max(c_1 x_1^-(0), c_2 x_2^-(0))} + 1\right)$.

A figura 1 ilustra as soluções apresentadas para os modelos acima. Note que o comportamento assintótico dos α-níveis em relação ao nível 1 permite obter o comportamento desejado para se construir uma solução que não seja do tipo gH$*$.

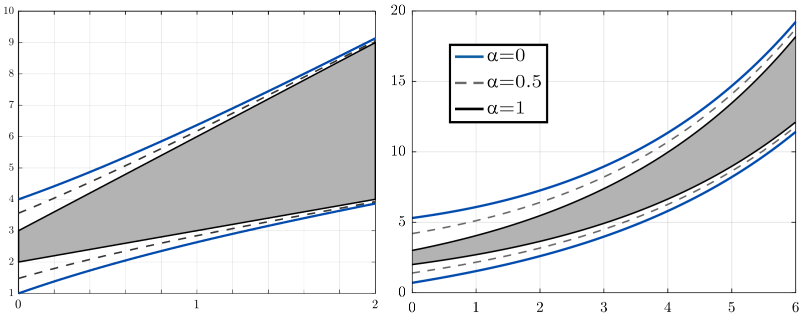

Figura 1: Soluções de $x'_g(t) = [a,b]$ e $x'_g(t) = r[x(t)]_1$ apresentadas acima.

Neste trabalho foram apresentados alguns exemplos de soluções de equações diferenciais g-fuzzy não gH$*$-diferenciáveis. Em estudos futuros, investigaremos quais as hipóteses sobre a função F implicam na existência de soluções do problema $x'_g(t) = F(t, x(t))$ que não sejam gH$*$-diferenciáveis.

Referências

[1] L. T. Gomes e L. C. Barros. “A note on the generalized difference and the generalized differentiability”. Em: **Fuzzy Sets and Systems** 280 (2015). Theme: Mathematical Analysis, pp. 142–145. ISSN: 0165-0114. DOI: `https://doi.org/10.1016/j.fss.2015.02.015`.

[2] B. Bede. **Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic**. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Springer,Berlin, Heidelberg, 2013. ISBN: 978-3-642-35221-8,978-3-642-35220-1,978-3-642-43302-3. DOI: `10.1007/978-3-642-35221-8`.

[3] Y. Chalco-Cano, R. Rodríguez-López e M.D. Jiménez-Gamero. “Characterizations of generalized differentiable fuzzy functions”. Em: **Fuzzy Sets and Systems** 295 (2016). Theme: Fuzzy Intervals and Analysis, pp. 37–56. ISSN: 0165-0114. DOI: `https://doi.org/10.1016/j.fss.2015.09.005`.

