Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

A Teoria das Frações Contínuas

Leonardo Barboza de Souza [1], [2]
Colégio Pedro II;,Rio de Janeiro, RJ

Neste trabalho, apresentamos um resumo da pesquisa desenvolvida através da dissertação de mestrado em Matemática em rede nacional – PROFMAT – IMPA. Investigamos as contribuições do estudo das frações contínuas no Ensino de Matemática.

Uma das frequentes discussões no Ensino de Matemática é a de abordar, de maneira consistente, a introdução ao conjunto dos números reais e a transição dos racionais para os reais. Em geral, esta passagem costuma ser impactante e muitas vezes árida para os alunos do Ensino Fundamental que estão tendo o primeiro contato com estes novos elementos e ideias.

De acordo com [1], visando discutir de modo mais amplo o Conjunto dos Números Reais, é vital direcionar os esforços sobre o estudo das Frações Contínuas a fim de obter novas representações dos números reais. A partir daí, é possível estudar de maneira mais precisa as aproximações dos números reais por números racionais, tendo como vantagem o fato de que todo número real (racional ou irracional) pode ser representado por meio de uma fração contínua (finita ou infinita).

Segundo [2], as frações contínuas simples para o número real x são representadas conforme as Equações 1 e 2, em que $a_i \in \mathbb{Z}$, para $i \in \mathbb{N}$.

$$\text{Quando } x \text{ for racional, temos que: } x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}} := [a_0; a_1, ..., a_{n-1}, a_n]; \tag{1}$$

$$\text{Caso contrário: } x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n} + \dots}}} := [a_0; a_1, ..., a_{n-1}, a_n, \dots]. \tag{2}$$

Um exemplo de fração contínua finita, que representa um número racional, é dado pela Equação 3.

$$\frac{25}{11} = 2 + \frac{3}{11} = 2 + \frac{1}{\frac{11}{3}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{3}{2}}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} := [2; 3, 1, 2]. \tag{3}$$

Observe que qualquer número real pode ser escrito como uma fração contínua, neste caso, as frações contínuas podem ser finitas, quando envolvem números racionais, ou infinitas, quando o número dado é irracional. A relação entre os números irracionais e os números racionais ocorre por meio de uma aproximação. A única via de acesso a um número irracional é a utilização de aproximações sucessivas através de números racionais. A Equação 4 descreve a expansão, em fração contínua, para $\sqrt{2}$.

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}}} = ... := [1; 2, 2, 2, 2, ...]. \tag{4}$$

[1] oelsouza.math@gmail.com
[2] leonardo.souza.2@cp2.edu.br

O *problema do calendário gregoriano*, solucionado pelo papa Gregório XIII, tem relação direta com o estudo das frações contínuas. O ano trópico, aquele que marca as estações, tem a duração média de 365 dias 5 horas 48 minutos e 46 segundos = 365,242199 dias. O calendário Juliano, estabelecido 45 a.C., considera a aproximação 1 ano = 365 dias 6 horas = 365,25 dias, ou seja, tinha uma diferença de cerca de 11 minutos em relação ao ano trópico. Esta diferença de 11 minutos, em cem anos, causava um desvio de 18 h 43 min 20 s. Esta aproximação causou um problema: as estações reais haviam retrocedido treze dias em relação ao Calendário Juliano. Em 1582, o papa Gregório III convocou sábios para resolver este problema. Para tal, principiou-se em se calcular o desvio proporcionado para um dia. Se em 1 ano o desvio é de 11 min 14s (674 s), então um dia proporciona o desvio dado por 128,19 anos. Assim, ocorre aproximadamente desvio de 128 anos para cada dia, ou seja, de cerca de 3 dias em cada 400 anos. Isto provocou uma pequena alteração na intercalação de três anos de 365 dias e um ano de 366 dias, que já era própria do calendário juliano. Enquanto a duração média do ano Juliano era de 365 dias 6 h, com a retirada de três dias do calendário gregoriano, o valor passou a ser $365\frac{97}{400}$ dias = 365,242500 dias, isto é, 365 dias 5 horas 49 min 12 s. O que ainda causa uma diferença de cerca de 26 segundos do valor real. A duração média de 1 ano é 365, 242199 dias. Daí, obtemos a fração

$\dfrac{5h48min46s}{1dia} = \dfrac{20926}{86400} = \dfrac{10463}{43200}$, cuja aproximação por fração contínua é dada pela Equação 5.

$$\frac{10463}{43200} \approx 365 + \cfrac{1}{4 + \frac{1}{7+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}} = 365 + \frac{31}{128}. \tag{5}$$

Nesse caso, são 31 anos bissextos a cada 128 anos.

A abordagem histórica tem importância fundamental para estruturar o trabalho didático da Matemática a ser ensinada. Isto pode ser observado a partir do surgimento dos números reais e de sua estreita relação com a representação por meio das frações contínuas. Na parte didática, é possível visualizar aplicações de frações contínuas em problemas cotidianos que são relevantes, e que naturalmente podem ser incentivados e explorados transversalmente em sala de aula por professores de matemática. Neste sentido, as frações contínuas são capazes de comprovar a irracionalidade de alguns números reais e de discutir problemas como o do calendário gregoriano e o algoritmo de Euclides.

Referências

[1] Wagner Marcelo Pommer. "O uso das Frações Contınuas como tema articulador no Ensino Médio". Em: **Revista Eletrônica de Matemática** 10 (2013).

[2] Fábio Brochero Martinez, Carlos Gustavo Moreira, Nicolau Saldanha e Eduardo Tengan. "Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro". Em: (2010).

