Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Uma introdução aos Autômatos Celulares sob o ponto de vista de Sistemas Dinâmicos e Dinâmica Simbólica

Paula Teresa Mota Gibrim[1], Luiz Carlos de Abreu Albuquerque[2], Pouya Mehdipour[3]
UFV, Viçosa, MG

Um *Autômato Celular* (AC) é uma coleção de células em uma grade de forma especificada que evolui através de uma série de etapas de tempo discreto, de acordo com um conjunto de regras baseadas nos estados das células vizinhas. Autômatos Celulares foram estudados no início dos anos 1950 como um possível modelo para sistemas biológicos [1], mas estudos mais abrangentes foram realizados por Wolfram a partir de 1980. O tipo mais simples de autômato celular é um autômato unidimensional binário, que mais tarde foi nomeado "autômato unidimensional celular". Existem 256 desses, cada um dos quais é indexado por um número binário exclusivo conhecido como "regra". Neste trabalho estudamos os autômatos celulares do ponto de vista de um sistema dinâmico e dinâmica simbólica. Os AC são modelos formais simples para sistemas dinâmicos complexos. Eles são usados em vários áreas científicas como ciência da computação, física, matemática, biologia, química, economia, entre elas, com diferentes propósitos. O primeiro estudo dos autômatos celulares como sistemas dinâmicos foi feito por Hedlund [2]. No projeto original, cujo resumo da versão preliminar está sendo apresentado aqui, pretendemos estudar a classificação de autômatos celulares e fazer modelagem computacional de configurações periódicas de regras 90, 30 e 110.

Definição 0.1. Uma **métrica** num conjunto X é uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que associa a cada par de pontos $x, y \in X$ um número real $d(x, y)$, chamado a **distância** de x a y, de modo que, para quaisquer $x, y, z \in X$, as seguintes condições são válidas:

(i) Positividade: $d(x, x) = 0$ e $d(x, y) > 0$ se $x \neq y$;

(ii) Simetria: $d(x, y) = d(y, x)$;

(iii) Desigualdade triangular: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

O par (X, d) é dito **espaço métrico**.

Definição 0.2. Uma **topologia** em um conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X a qual satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\emptyset \in \tau$ e $X \in \tau$

(ii) Se $(A_i)_{i\in I}$ é uma família de elementos de τ, então $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$;

(iii) Se $(A_i)_{i\in I}$ é uma família finita de elementos de τ, então $\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i \in \tau$.

[1]paula.gibrim@ufv.br
[2]lcaa@ufv.br
[3]pouya@ufv.br

O par (X, τ) é dito **espaço topológico**.

Considere (X, τ) um espaço topológico. Um subconjunto A de X é chamado **aberto** de X se A pertence a τ. Um subconjunto F de um espaço topológico X diz-se **fechado** se o seu complementar $X \setminus F$ é aberto. Sejam (X, τ) e (Y, ρ) espaços topológicos. Dizemos que $f : X \to Y$ é uma **função contínua** se, para todo A aberto em Y(isto é, $A \in \rho$) temos que $f^{-1}[A]$ é aberto em X (isto é, $f^{-1}[A] \in \tau$). Uma aplicação $T : X \to Y$ entre espaços topológicos é dita um **homeomorfismo** se é bijetiva, contínua e sua inversa T^{-1} é contínua.

Teorema 0.1. *Se (X, d) é um espaço métrico, então a coleção de todas as bolas $B_d(x, r) = \{y \in X; d(x, y) < r\}$, para $x \in X$ e $r > 0$, gera uma topologia sobre X, chamada de **topologia métrica** induzida pela métrica d e, portanto, (X, τ_d) é um espaço topológico.*

Definição 0.3. Um sistema dinâmico (X, f) consiste em um espaço métrico (X, d) e uma aplicação contínua $f : X \to X$. Se f é um homeomorfismo, chamamos (M, f) de **sistema dinâmico inversível**.

Dado um conjunto A finito, definamos uma função $f : \mathbb{Z} \to A$ que será nossa sequência bi-infinita de elementos de A. Podemos representar $f \in A^{\mathbb{Z}}$ por extenso como: $\ldots x_{-2}x_{-1} \cdot x_0x_1x_2 \ldots$ onde $f(i) = x_i$. Dessa forma, chamamos de **shift completo** $A^{\mathbb{Z}}$ o conjunto de todas as sequências bi-infinitas de A. Vamos usar a amostra onde $A = \{0, 1\}$ e $X = A^{\mathbb{Z}} = \{(x_n) | \forall n \in \mathbb{Z}; x_n \in A\}$ em todo o trabalho, uma vez que é um exemplo que se aproxima da realidade computacional. Definiremos, então, uma função σ que tornará o par $(A^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ um sistema dinâmico discreto.

Definição 0.4. A função $\sigma : A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$, conhecida como **operador de shift**, associa a cada elemento $x \in A^{\mathbb{Z}}$ um elemento $\sigma(x) \in A^{\mathbb{Z}}$ de modo que: $\sigma^n(x)_i = x_{i+n}, \forall i, n \in \mathbb{Z}$.

Seja $\mathcal{X}$ um subconjunto de $A^{\mathbb{Z}}$, e seja $\mathcal{B}_n(\mathcal{X})$ a notação do conjunto de todos os n-blocos que ocorrem em pontos de $\mathcal{X}$; a linguagem de $\mathcal{X}$ é a coleção $\mathcal{B}(\mathcal{X}) = \cup_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n(\mathcal{X})$. O 2-**shift** completo com $A = \{0, 1\}$ tem linguagem $\{\varepsilon,\ 0,\ 1,\ 00,\ 01,\ 10,\ 11,\ \ldots\}$. Seja $A_X^{[N]} = \mathcal{B}_N(X)$ seja a coleção de todos os N-blocos permitidos em X. Consideramos $A_X^{[N]}$ como um alfabeto e formamos o **shift completo** $(A_X^{[N]})^{\mathbb{Z}}$.

Definição 0.5. Um **Autômato Celular** $\phi : (A_X^{[N]})^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ é uma transformação continua de sequências que leva um ponto $x \in (A_X^{[N]})^{\mathbb{Z}}$ em um ponto $y \in A^{\mathbb{Z}}$. Fixemos inteiros m (memória) e n (antecipação) tal que $-m \leq n$ e $N = m + n + 1$. Definamos a função $\Phi : \mathcal{B}_N(X) \to A$, chamada função de $N-$blocos. Assim, $y_i = \Phi(x_{[i-m,i+n]})$ para $y = (y_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in A^{\mathbb{Z}}$.

Teorema 0.2. *O operador de shift é um Autômato Celular.*

Referências

[1] S. Wolfram. **A New Kind of Science, Wolfram Media, 2002**. Online. Acessado em: 09/04/2023. `https://www.wolframscience.com/nks/`.

[2] J. Kari. "Theory of cellular automata: A survey". Em: **Theoretical Computer Science** 334 (2005), pp. 3–33. DOI: `10.1016/j.tcs.2004.11.021`.

