Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Estudo de uma equação logística utilizando o método de sub-supersolução

Willian V. Felipe[1] Marcos T. de O. Pimenta[2]
FCT-Unesp, Presidente Prudente, SP

A matemática é amplamente utilizada na ciência, principalmente através da modelagem, consistindo em descrever fenômenos de diversas áreas de conhecimento. Entre eles é possível citar a modelagem populacional, mediante a equações logística.

A finalidade deste trabalho é apresentar uma equação logística homogênea de tal dinâmica, buscando uma solução pelo método de sub-supersolução. Tais conceitos envolvem problemas de autovalores de uma equação elíptica em um domínio limitado, associados a operadores autoadjuntos.

Primeiramente será definido o conceito de sub-supersolução, encontrado em [1]. Considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) & = f(x,u) \quad , \text{ para todo } x \in \Omega, \\ \quad u(x) & = 0 \quad\quad\quad , \text{ para todo } x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto e limitado de fronteira $C^{2,\gamma}$, $0 < \gamma < 1$. Suponha que $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f \in C^\gamma(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$.

Definição 0.1. *A função $\underline{u} \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ é uma **subsolução** do problema* (P) *se,*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) & \leq f(x,u) \quad , \textit{ para todo } x \in \Omega, \\ \quad u(x) & \leq 0 \quad\quad\quad , \textit{ para todo } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Definição 0.2. *A função $\overline{u} \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ é uma **supersolução** do problema* (P) *se,*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) & \geq f(x,u) \quad , \textit{ para todo } x \in \Omega, \\ \quad u(x) & \geq 0 \quad\quad\quad , \textit{ para todo } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Definição 0.3. *Um par de soluções $(\underline{u}, \overline{u}) \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ é chamado de **sub-supersolução** do problema* (P) *se verificar as três condições seguintes:*

a) $\underline{u}(x) \leq \overline{u}(x), \forall x \in \Omega,$

b) $\underline{u}(x) \leq 0 \leq \overline{u}(x), \forall x \in \partial\Omega,$

c) $-\Delta\underline{u}(x) \leq f(x, \underline{u}(x)), \quad -\Delta\overline{u}(x) \leq f(x, \overline{u}(x)) \ \forall x \in \Omega.$

Teorema 0.1. *Seja $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ e o problema* (P) *admite uma sub-supersolução $(\underline{u}, \overline{u})$. Então, existe uma solução $u \in C^2(\overline{\Omega})$ de* (P) *que verifica*

$$\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x), \ \forall x \in \Omega.$$

[1] willian.felipe@unesp.br
[2] marcos.pimenta@unesp.br

A seguinte equação é utilizada para dinâmica de população, onde $u(x)$ representa a densidade populacional, habitada em um ambiente Ω

$$\begin{cases} -\Delta u(x) & = \lambda u(x) - bu^2(x) \quad , \text{ para todo } x \in \Omega \\ \quad u(x) & = 0 \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad , \text{ para todo } x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

com $b > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, sendo λ a taxa de natalidade da espécie, e $-bu^2$ é o termo que representa a limitação do meio.

O seguinte resultado garante uma única solução para o problema (1)

Teorema 0.2. *Existe uma única solução positiva de* (1) *se, e somente se,* $\lambda > \lambda_1$*, onde* λ_1 *representa o primeiro autovalor do operador* $-\Delta$ *em* $H_0^1(\Omega)$*.*

Utilizando como supersolução do problema (1), $\overline{u} = K$, sendo K uma constante positiva grande e a subsolução como $\underline{u} = \varepsilon\varphi_1$, onde $\varepsilon \in \mathbb{R}$ é pequeno o suficiente e φ_1 a autofunção associada ao primeiro autovalor λ_1 definido por,

$$\lambda_1 := \inf \left\{ \int_\Omega (|\nabla u|^2), \; u \in H_0^1(\Omega), \; ||u||_{L^2} = 1 \right\}. \tag{2}$$

Ao demonstrar o Teorema 0.2 em casos concretos, pode-se fazer interessantes interpretações biológicas dos resultados matemáticos obtidos. De fato, essa equação é um protótipo de sistemas mais complexos, no qual se leva em conta a presença de duas ou mais espécies.

Referências

[1] A. Suárez Fernandez. **Resúmenes teóricos de la asignatura - Métodos topológicos para ecuaciones elípticas (parte 2). Apuntes de class**. Programa de Doctorado de la Universidad Federal de Pará, Belém, Brasil. 2014-2015.

[2] David Gilbarg e Neil S Trudinger. **Elliptic partial differential equations of second order**. Vol. 224. 2. Springer, 1977.

[3] Julián López-Gómez. **Linear second order elliptic operators**. World Scientific Publishing Company, 2013.

[4] Herbert Amann. "Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces". Em: **SIAM review** 18.4 (1976), pp. 620–709.

[5] Klaus Deimling. "Nonlinear functional analysis". Em: **Springler-Verlag, Berlin** 105 (1985).

[6] Julián López-Gómez. "The maximum principle and the existence of principal eigenvalues for some linear weighted boundary value problems". Em: **Journal of Differential Equations** 127.1 (1996), pp. 263–294.

