

Entropia de Permutação no Contexto do Cálculo de Complexidade do Mapa Logístico

Rebeca R. H. Pinafo¹, Patrícia R. Cirilo², Karen Paulino³, João V. Rangel⁴, Elbert E. N. Macau⁵

ICT-UNIFESP, São José dos Campos, SP,

Neste trabalho temos o objetivo de estudar sob a perspectiva de medidas de complexidade o mapa logístico (1):

$$x_{n+1} = rx_n(1 - rx_n) \quad (1)$$

O mapa logístico é um mapa discreto apresentado por Robert May [1] para descrever o crescimento populacional em sistemas biológicos, sendo x_n a população no tempo n e r a taxa de crescimento da população considerada. A simplicidade algébrica da equação logística e a riqueza de fenômenos dinâmicos não lineares envolvidas neste modelo, foram amplamente discutidos na literatura. Em especial, como estudado em [2], identificou-se que para a variação do parâmetro r no intervalo $3, 5 \leq r \leq 4.0$ a aplicação apresenta comportamento caótico muito interessante.

O diagrama de bifurcação e o expoente de Lyapunov são duas das ferramentas geométricas mais usadas para análise das propriedades do mapa logístico em relação à caoticidade que este apresenta. O presente trabalho tem por objetivo o cálculo de algumas medidas de complexidade propostas em [3], [4], [5], [6], [7] para o mapa logístico, substituindo nestas medidas a entropia de Shannon pela entropia de permutação [8]. Em seguida, será feita a comparação do resultado obtido com seu diagrama de bifurcação e expoente de Lyapunov.

A área de sistemas dinâmicos complexos possui ainda muito a ser explorada. Embora não exista uma definição precisa para a complexidade, é conhecido da literatura que trata-se da investigação em relação à estrutura do sistema, sobre como seus constituintes se relacionam e como essas relações interferem no seu comportamento dinâmico, como é discutido em [9]. Logo, as medidas de complexidade têm a função de quantificar, dentro de um contexto bem estabelecido, o quão o sistema é ordenado ou não.

Ao estabelecer a comparação com o mapa logístico, pretendemos analisar se existem características que as medidas de complexidade conseguem indicar e que não são perceptíveis com a análise do diagrama de bifurcação e/ou expoente de Lyapunov, bem como estabelecer uma referência que nos permita explorar e obter maior compreensão das medidas de complexidade.

Os resultados das análises numéricas e qualitativas do sistema dinâmico proposto continuam em estudo. Com as comparações já realizadas, há um forte indício de que as medidas de complexidade tenham maior sensibilidade para indicar janelas periódicas, quando comparadas ao expoente de Lyapunov. É possível observar que os gráficos das medidas de complexidade gerados apresentam vários picos que coincidem com janelas periódicas aparentes no diagrama de bifurcação.

¹rebeca.pinafo@unifesp.br

²pcirilo@unifesp.br

³klgpaulino@unifesp.br

⁴jrangel12@unifesp.br

⁵elbert.macau@unifesp.br

Agradecimentos

Os autores agradecem à Capes pelo apoio financeiro à pesquisa.

Referências

- [1] May R. M. “Simple mathematical models with very complicated dynamics”. Em: **Nature** 261 (1976), pp. 459–67. DOI: 10.1038/261459a0.
- [2] M.W. Hirsch, S. Smale e R.L. Devaney. **Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos**. Elsevier Science, 2013. ISBN: 9780123820105. URL: https://books.google.co.ao/books?id=csYhsr0Eh%5C_MC.
- [3] R. López-Ruiz, H.L. Mancini e X. Calbet. “A statistical measure of complexity”. Em: **Physics Letters A** 209.5 (1995), pp. 321–326. ISSN: 0375-9601. DOI: [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(95\)00867-5](https://doi.org/10.1016/0375-9601(95)00867-5). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960195008675>.
- [4] P Feldman David e P Crutchfield James. “Measures of statistical complexity: Why?” Em: **Physics Letters A** 238.4 (1998), pp. 244–252. ISSN: 0375-9601. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(97\)00855-4](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(97)00855-4). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960197008554>.
- [5] José Roberto Castilho Piqueira. “A mathematical view of biological complexity”. Em: **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation** 14.6 (2009), pp. 2581–2586.
- [6] JRC Piqueira, SHVL De Mattos e J Vasconcelos-Neto. “Measuring complexity in three-trophic level systems”. Em: **Ecological Modelling** 220.3 (2009), pp. 266–271.
- [7] José Roberto C Piqueira e Sérgio Henrique VL de Mattos. “Note on LMC complexity measure”. Em: **Ecological Modelling** 222.19 (2011), pp. 3603–3604.
- [8] Christoph Bandt. “Small Order Patterns in Big Time Series: A Practical Guide”. Em: **Entropy** 21.6 (2019). ISSN: 1099-4300. DOI: 10.3390/e21060613. URL: <https://www.mdpi.com/1099-4300/21/6/613>.
- [9] Michel Baranger. “Chaos, complexity, and entropy”. Em: **New England Complex Systems Institute, Cambridge** 17 (2000).