Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Aplicações de Controle Ótimo em Pair Trading

Lucas E. Mieri [1]
Saul.C. Leite[2]
CMCC/UFABC, Santo André, SP

A teoria do controle ótimo tem sido empregada como modelo para sistemas em diversas áreas da pesquisa. Entre as aplicações desta teoria, destaca-se o pair trading, uma estratégia de investimento que busca identificar divergências entre ativos fortemente correlacionados e assumir uma posição comprada e vendida em cada um dos ativos, detalhado em [1] e [2], com o objetivo de lucrar no processo de reversão à média.

Pair trading explora momentos de ineficiência na precificação de ativos historicamente correlacionados, monitorando oportunidades de descasamento de preços que possam ser elegíveis para uma regra de arbitragem, como descrito em [1]. Este estudo foca na modelagem de arbitragem aplicada ao contexto do mercado brasileiro, sendo descrita como um processo estocástico reversível à média ou Ornstein-Uhlenbeck (OU), levando em conta custos de transação e limites de stop-loss.

O modelo proposto é abordado utilizando a teoria de controle ótimo estocástico, empregando as soluções analíticas descritas pela equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). A aplicação dessa teoria no contexto do pair trading visa identificar os momentos adequados para realizar operações de compra e venda de ativos, otimizando a gestão de risco e retorno, e considerando as restrições impostas pelos custos de transação e limites de stop-loss, como visto em [3].

Suponha que X_1 e X_2 são processos estocásticos representando o preço de duas ações correlacionadas. O processo Z_t representa um ativo sintético definido a partir de uma posição long em uma unidade de X_1 e short em K_0 unidades de X_2, em que K_0 que representa a quantidade de ativos em short referente a cada unidade de ativos em long, sendo assim $Z_t = X_{1t} - K_0 X_{2t}$. Utilizando um modelo de Ornstein-Uhlenbeck para Z_t, tem-se

$$dZ_t = \theta(\mu - Z_t)dt + \sigma dW_t, \quad Z_0 = x \tag{1}$$

onde θ refere-se à força de reversão, μ ao nível de reversão, σ à volatilidade e W_t ao movimento browniano. Considere os intervalos $l_1 = [x_0, x_1]$ e $l_2 = (M, x_2)^c$, para $M < x_0 < x_1 < x_2$, em que M representa o valor de stop-loss. Estes intervalos definem momentos de compra e venda do ativo sintético, respectivamente. Para o valor do stop-loss, impõe-se a condição de que seja inferior ao spread Z_t, restringindo a perda esperada a um nível aceitável. Seja τ_n^b o momento da decisão de compra e τ_n^s o momento da decisão de venda. Tomando o estado $i \in \{0, 1\}$, de forma que $i = 1$ registra a posição comprada em Z_t e $i = 0$ não comprada, tem-se o conjunto de ações que delimita cada decisão tomada pelo processo como $\Lambda_1 = (\tau_1^s, \tau_2^b)$ e $\Lambda_0 = (\tau_1^b, \tau_2^s)$. Para um custo de transação fixo $K > 0$, estado inicial $Z_0 = x$ e fator de desconto ρ, a função de recompensa $J_i(x, \Lambda_i)$ é utilizada para representar o valor da recompensa descontada, dado a posição vigente i e o estado inicial x.

A equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) é usada para encontrar a função de valor ótimo $V_i(x)$, que representa o valor esperado máximo acumulado da função de recompensa $J_i(x, \Lambda_i)$, considerando as decisões de compra e venda ótimas. A HJB descreve a relação dinâmica entre o

[1]lucas.mieri@aluno.ufabc.edu.br
[2]saul.leite@ufabc.edu.br

valor ótimo e as decisões de compra e venda, levando em conta as restrições impostas pelos custos de transação, limites de stop-loss e fator de desconto.

Aplicando o modelo para o mercado brasileiro, tomando como base duas acoes claramente correlacionadas como CMIG3 e CMIG4, partindo do primeiro dia de 2018 até 2023.

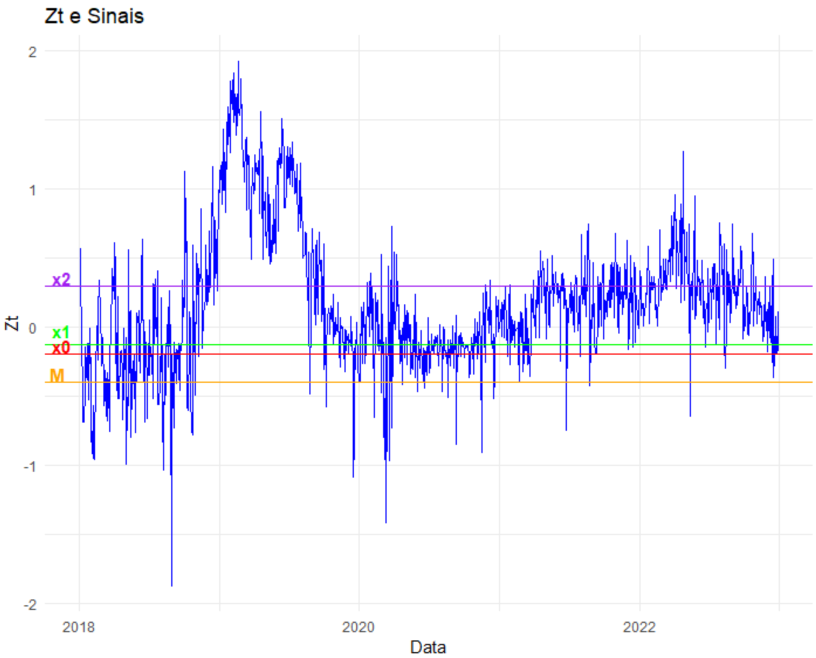

Figura 1: O gráfico da evolução do ativo sintético Z_t, composto por CMIG3 e CMIG4, em relação aos limiares de compra e venda, bem como ao nível de stop-loss M. A estratégia é aplicada com base nos limiares ótimos determinados. As transações são realizadas utilizando metade do capital para posições long e metade para posições short. A compra é realizada no intervalo $[x_0, x_1]$, enquanto a venda em $(M, x_2)^c$. Fonte: Autores.

O retorno médio foi de 6.6%. Em conclusão, a combinação da teoria do controle ótimo estocástico e da estratégia de pair trading demonstrou potencial para identificar oportunidades. A aplicação dessa abordagem em um portfólio de investimentos pode contribuir para a melhoria do desempenho e a diversificação das estratégias de investimento.

Referências

[1] Christopher Krauss. "Statistical Arbitrage Pairs Trading Strategies: Review and Outlook". Em: **Journal of Economic Surveys** 31.2 (mai. de 2016), pp. 513–545. DOI: 10.1111/joes.12153. URL: https://doi.org/10.1111/joes.12153.

[2] Ganapathy Vidyamurthy. **Pairs Trading: Quantitative Methods and Analysis**. English. Hardcover. Wiley, 16 de ago. de 2004, p. 222. ISBN: 978-0471460671. URL: https://lead.to/amazon/com/?op=bt&la=en&cu=usd&key=0471460672.

[3] Qingshuo Song e Qing Zhang. "An optimal pairs-trading rule". Em: **Automatica** 49.10 (out. de 2013), pp. 3007–3014. DOI: 10.1016/j.automatica.2013.07.012. URL: https://doi.org/10.1016/j.automatica.2013.07.012.