Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Um Método para Determinar uma Fonte Dipolo Matemático para um Modelo 2D de Eletroencefalografia

Denis Mota de Sousa[1]

Universidade Federal do Rio de Janeiro, Campus UFRJ Duque de Caxias Professor Geraldo Cidade, Duque de Caxias, RJ

A eletroencefalografia (EEG) é uma técnica não invasiva usada para medir a atividade elétrica do cérebro. Durante um exame de EEG, eletrodos são colocados no couro cabeludo do paciente para registrar os sinais elétricos gerados pelo cérebro. A EEG é amplamente utilizada para avaliar a função cerebral em condições como a epilepsia, transtornos do sono, coma, danos cerebrais, e algumas doenças neurodegenerativas. Além disso, também é usado para monitorar a anestesia durante procedimentos cirúrgicos.

Existem muitos trabalhos considerando problemas diretos [1] e problemas inversos [2] em EEG. Neste trabalho consideramos a versão simplificada em 2D do modelo matemático que viabilizou esta tecnologia, para propor um novo método para identificar a localização e a intensidade das fontes que produziram um determinado sinal.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ o domínio do problema, no qual representa a caixa craniana de uma pessoa. Denotaremos por $\partial\Omega$ o bordo de Ω, por $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x, y)$ o vetor normal a $\partial\Omega$ exterior a Ω no ponto $(x, y) \in \partial\Omega$ e por $\sigma \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ a matriz simétrica positiva que representa a condutividade elétrica no interior da cabeça. Desta forma, o potencial elétrico $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ no domínio Ω satisfaz a seguinte equação de Poisson não homogênea com condição de Neumann:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \nabla \cdot (\sigma \nabla u) & = & \nabla \cdot \mathbf{J}^p \quad \text{em } \Omega \\ (\sigma \nabla u) \cdot \mathbf{n} & = & 0 \quad \text{em } \partial\Omega \end{array} \right. , \tag{1}$$

onde $\mathbf{J}^p : \Omega \to \mathbb{R}^2$ representa a densidade de corrente elétrica produzida pela atividade neural.

Seja $X \subset \partial\Omega$ um conjunto de N pontos. Os elementos de X representam a localização de cada sensor colocado na cabeça do paciente. Apresentamos a seguir o problema inverso associado a (1).

Problema 1 (Problema Inverso)**.** *Considerando Ω, σ e X conhecidos, encontre a atividade neural $\mathbf{J}^p$ que satisfaça (1), sabendo-se u nos pontos de X.*

Em [3] foi constatado que o **dipolo matemático** é o modelo de fonte mais adequado para representar a atividade cerebral. A função densidade corrente $\mathbf{J}^p$ para um dipolo matemático na posição (x_0, y_0) com momento p_0, q_0 pode ser caracterizado por

$$\mathbf{J}^p(x, y) = (p_0, q_0)\delta\left((x, y) - (x_0, y_0)\right), \tag{2}$$

para $(x, y) \in \Omega$, onde δ é a **distribuição delta de Dirac**.

Consideramos o **Problema 1** onde a densidade de corrente é dada por (2). Note que determinar esta fonte significa achar (p_0, q_0) e (x_0, y_0).

A formulação variacional proposta aqui é similar a encontrada em [4]. Definimos o espaço de funções testes $V = \{v \in H^1(\Omega) \mid \nabla \cdot (\sigma \nabla v) = 0\}$. Multiplicando o lado esquerdo da equação

[1]denis@caxias.ufrj.br

diferencial de (1) por uma função de V e integrando sobre Ω, aplicando a segunda identidade de Green e considerando a simetria da matriz σ, obtemos

$$\int_{\Omega} \left(\nabla \cdot (\sigma \nabla u(x,y))\right) v(x,y)\, dxdy \;=\; -\int_{\partial\Omega} u(x,y)(\sigma \nabla v(x,y)) \cdot \mathbf{n}(x,y)\, d\ell. \tag{3}$$

Fazendo o mesmo para o lado direito da equação diferencial de (1), temos

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \left((p_0,q_0)\delta((x,y)-(x_0,y_0))\right) v(x,y)\, dxdy \;=\; -(p_0,q_0) \cdot \nabla v(x_0,y_0). \tag{4}$$

Como σ é simétrica, em uma base adequada ela é uma matriz diagonal. Considerando que os seus elementos não nulos sejam σ_{11} e σ_{22} na base referida, as funções

$$v_k(x,y) = \mathrm{sen}(k\sqrt{\sigma_{22}}x)e^{-k\sqrt{\sigma_{11}}y} \quad \text{e} \quad w_k(x,y) = \mathrm{sen}(k\sqrt{\sigma_{22}}x)e^{k\sqrt{\sigma_{11}}y}, \tag{5}$$

para $k = 1, 2, 3, \ldots$, com $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, estão em V.

Considerando a igualdade entre as expressões (3) e (4), e as funções testes v_k e w_k, com $k = 1, 2, \ldots, M$, definidas em (5), chegamos em um sistema de equações não lineares onde cada equação é dada por

$$F_k(x,y,p,q) \;=\; B_k, \tag{6}$$

para $k = 1, 2, 3, \ldots, M$, onde B_k é a integral (3) calculada usando a regra de Simpson e F_k é definida conforme o lado direito de (4).

Usamos o método de Levenberg-Marquardt [5] para resolver o sistema de equações não lineares gerado por (6). Alguns experimentos numéricos foram feitos para validar a teoria desenvolvida. Num trabalho testaremos o método apresentado aqui quanto a acurácia, velocidade e robustez contra ruídos e artefatos em comparação aos principais métodos utilizados para caracterizar fontes em EEG (**low-resolution eletromagnetic tomography activity** - LORETA e **minimum norm estimation** - MNE).

Referências

[1] H. Hallez, B. Vanrumste, R. Grech, J. Muscat, W. De Clercq, A. Vergult, Y. D'Asseler, K.P. Camilleri, S.G. Fabri, S. Van Huffel e I. Lemahieu. "Review on solving the forward problem in EEG source analysis". Em: **Journal of Neuroengineering and Rehabilitation** 4 (2007). DOI: 10.1186/1743-0003-4-46.

[2] R. D. Pascual-Marqui. "Review of Methods for Solving the EEG Inverse Problem". Em: **International Journal of Bioelectromagnetism** 1 (1999), pp. 75–86.

[3] J. de Munck, B. van Dijk e H. Spekreijse. "Mathematical dipoles are adequate to describe realistic generators of human brain activity." Em: **IEEE Transactions on Biomedical Engineering** 35 (1988), pp. 960–966. DOI: 10.1109/10.8677.

[4] A. Rap, L. Elliott, D. Ingham, D. Lesnic e Wen. "An inverse source problem for the convection-diffusion equation". Em: **International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow** 16 (2006), pp. 125–150. DOI: 10.1186/1743-0003-4-46.

[5] J. Nocedal e S. J. Wright. **Numerical Optimization**. 2nd Edition. New York: Springer, 2006. ISBN: 0-387-30303-0.