Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Tesselando no Disco de Poincaré com o GeoGebra

Rudimar L. Nós[1]
DAMAT/UTFPR, Curitiba, PR
Alfred J. D. Albon[2]
Unifesp, São José dos Campos, SP

Resumo. Apresentamos neste trabalho uma tesselação com triângulos hiperbólicos no disco de Poincaré, um modelo de geometria não euclidiana no plano. Construímos a tesselação empregando o GeoGebra, um software gratuito e de acesso remoto, agregando ao menu básico do aplicativo as ferramentas hiperbólicas disponíveis em páginas da sua plataforma. Atividades abrangendo tesselações hiperbólicas, como aquela aqui apresentada, podem ser exploradas no curso de geometrias não euclidianas da Licenciatura em Matemática, e podem também ser adaptadas para o Ensino Médio. Concluímos que o GeoGebra é uma excelente ferramenta para motivar/desenvolver o estudo de geometrias não euclidianas, e que atividades com tesselações promovem a interdisciplinaridade, associando matemática e arte.

Palavras-chave. Geometrias não euclidianas, Reta hiperbólica, Tesselações hiperbólicas, Polígonos hiperbólicos.

1 Introdução

A geometria de Euclides [8] está fundamentada em cinco postulados, dentre eles o postulado das paralelas. As investigações acerca da não evidência desse postulado originaram as geometrias não euclidianas. Uma das consequências dessas novas geometrias "[...] foi a libertação da geometria de seus moldes tradicionais. Despedaçou-se uma convicção secular e profundamente arraigada de que apenas uma geometria era possível e abriu-se caminho para a criação de muitos outros sistemas geométricos" ([9], p. 544). Duas dessas novas geometrias são a geometria esférica [14–17] e o modelo do disco de Poincaré [1, 3].

> As geometrias não euclidianas embasam Ciências, como a cartografia (geometria esférica), e teorias, como a teoria da relatividade (geometria Riemaniana). Assim, constituem um tema pertinente à formação do professor de matemática e deveriam constar nos currículos dos cursos de Licenciatura em Matemática ([2], p. 18).

O Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná (RCEMP) [18] destaca a importância do estudo de geometrias não euclidianas na Educação Básica. Infelizmente, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [4] não faz o mesmo.

> Com relação às geometrias não euclidianas, elas surgem entre o final do século XVIII e o início do século XIX e ganham importância no início do século XX com a Teoria da Relatividade Geral e, posteriormente, com o desenvolvimento da Teoria dos Fractais. [...] O seu surgimento mostrou que, para compreender diversos problemas da realidade e do mundo científico, além das relações matemáticas com a própria geometria euclidiana

[1] rudimarnos@utfpr.edu.br
[2] alfred_james_dias@outlook.com

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics. v. 11, n. 1, 2025.

é necessário incorporar na Educação Básica o estudo das geometrias não euclidianas ([18], p. 541).

Enquanto a BNCC propõe cinco unidades temáticas de matemática para o Ensino Fundamental, o RCEMP propõe quatro: números e álgebra; grandezas e medidas; geometrias; tratamento da informação. Na unidade temática geometrias, "o uso das tecnologias digitais, como os softwares de geometria dinâmica, é uma ferramenta importante no desenvolvimento de atividades exploratórias e investigativas que envolvem os conteúdos relacionados às geometrias" ([18], p. 542).

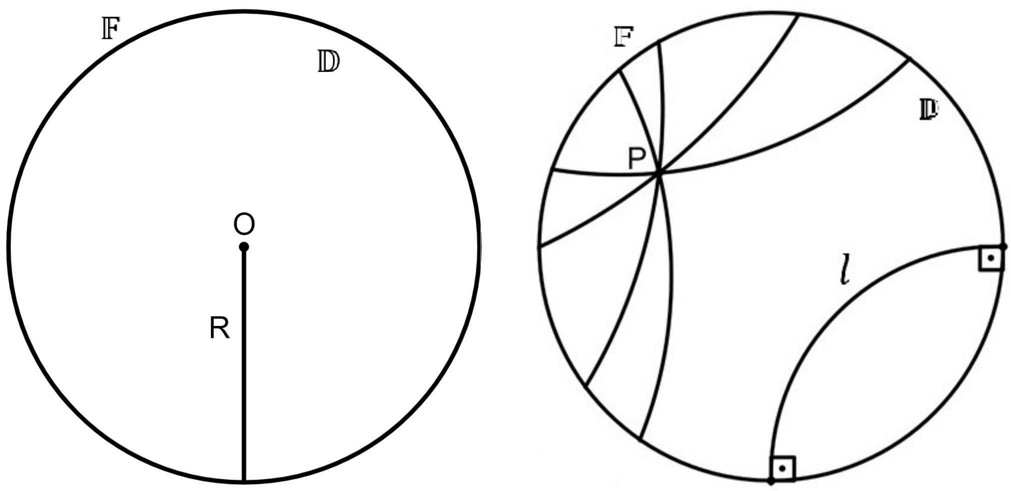
No RCEMP, a habilidade específica EM13MAT105 estabelece: "Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para analisar diferentes produções humanas como construções civis, obras de arte, entre outras" ([18], p. 43). Para essa habilidade, os objetos de conhecimento incluem as geometrias não euclidianas, e os conteúdos, noções de geometria elíptica e hiperbólica.

Desta forma, propomos neste trabalho uma atividade sobre geometrias não euclidianas [1, 2]. A atividade aborda a construção de uma tesselação com triângulos hiperbólicos no disco de Poincaré, um modelo de geometria hiperbólica no plano, e foi planejada para ser aplicada na Licenciatura em Matemática, podendo ser adaptada para o Ensino Médio. Construímos a tesselação no GeoGebra [10, 11], um aplicativo de geometria dinâmica. Na atividade, relacionamos matemática e arte [7, 12, 13].

2 O disco de Poincaré

O disco de Poincaré - Figura1(a) [1, 3] é a região do plano delimitada por uma circunferência (disco) unitária, munida de uma unidade para medir distâncias no contexto da geometria hiperbólica, isto é, a métrica hiperbólica. Mais especificamente, o modelo é o disco $\mathbb{D}$, de centro $O = (0, 0)$, definido pelos pontos $z \in \mathbb{C}$ que estão a uma distância de O menor do que a medida do raio unitário ($R = 1$) de $\mathbb{D}$, isto é,

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; \mid z \mid < 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}. \tag{1}$$



(a) (b)

Figura 1: (a) Disco de Poincaré [1]; (b) retas hiperbólicas no disco de Poincaré [1].

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0487

No disco unitário (1), os pontos que equidistam de $O = (0, 0)$, ou seja, que estão a uma distância unitária de O, constituem os pontos da fronteira $\mathbb{F}$ de $\mathbb{D}$. Estes pontos são denominados *pontos ideais* ou *pontos assintóticos*. Assim:

$$\mathbb{F} = \{z \in \mathbb{C}; \mid z \mid= 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}. \tag{2}$$

A Figura 1(a) ilustra o disco de Poincaré $\mathbb{D}$ e sua fronteira $\mathbb{F}$. O conjunto dos pontos de fronteira (2) de $\mathbb{D}$ é uma circunferência unitária de centro $O = (0, 0)$. No disco de Poincaré, os pontos da fronteira $\mathbb{F}$ estão no infinito.

No modelo do disco de Poincaré, a reta, denominada *geodésica* ou *d-linha*, define a menor distância entre dois pontos. Uma d-linha é uma parte de uma circunferência euclidiana contida no disco $\mathbb{D}$ e que intersecta a fronteira $\mathbb{F}$ de $\mathbb{D}$ em dois pontos distintos, determinando nesses pontos de fronteira dois ângulos retos, como ilustra a Figura 1(b). Desta forma, se P é um ponto pertencente a $\mathbb{D}$, então há uma infinidade de d-linhas que passam por esse ponto.

Um polígono hiperbólico é uma região aberta de $\mathbb{D}$ limitada por um número finito de segmentos geodésicos (partes de d-linhas), denominados lados. Um polígono hiperbólico é denominado *ideal* se todos os vértices pertencem à fronteira $\mathbb{F}$ de $\mathbb{D}$; é denominado *regular* se todos os lados hiperbólicos são congruentes. A Figura 2 ilustra triângulos hiperbólicos no disco de Poincaré. Nesses triângulos, a soma dos ângulos internos é menor do que 180° [1, 3].

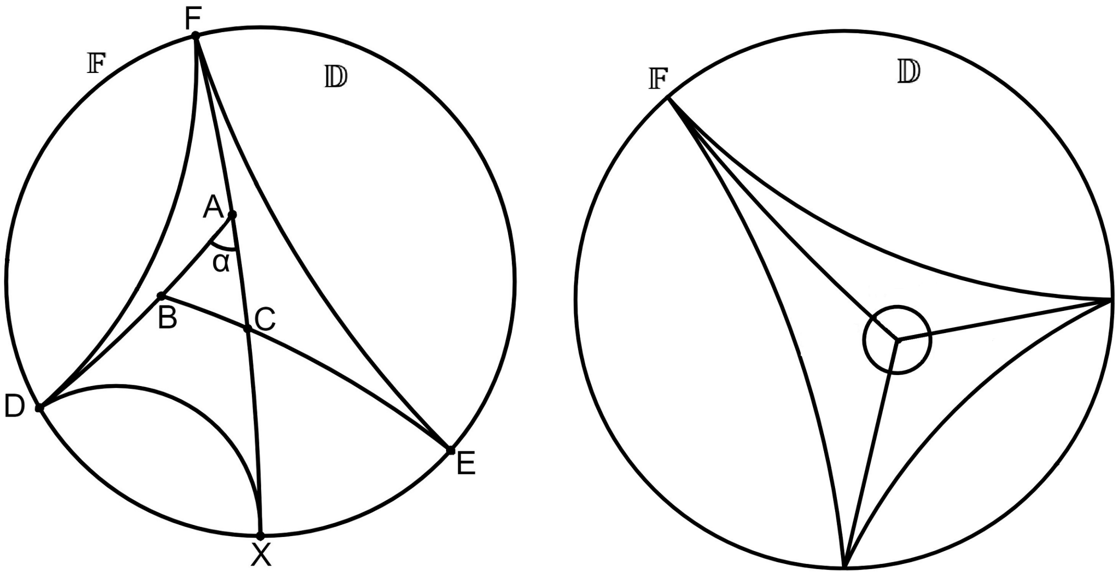


Figura 2: Triângulos hiperbólicos no disco de Poincaré [1].

Um círculo hiperbólico é o conjunto dos pontos que estão a uma distância hiperbólica fixa r de um ponto dado C, que também é fixo, ou seja, o círculo hiperbólico de raio r e centro C é o conjunto definido por $\{z : d(C, z) = r, z \in \mathbb{D}\}$ ([3], p. 373). Um fato notável é que todo círculo hiperbólico é um círculo euclidiano [3]. A Figura 3 ilustra dois círculos hiperbólicos no disco de Poincaré, construídos com as ferramentas hiperbólicas do GeoGebra. Observa-se que o centro O'' de C' está deslocado. Isto ocorre quando o círculo hiperbólico está próximo da fronteira $\mathbb{F}$ de $\mathbb{D}$.

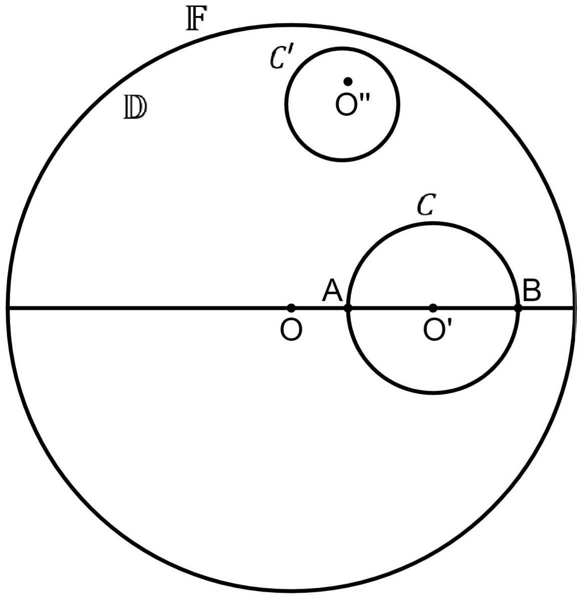


Figura 3: Círculos hiperbólicos C e C' no disco de Poincaré [1, 2].

3 Tesselações hiperbólicas

Tesselar, cujos sinônimos são ladrilhar, pavimentar ou construir mosaicos, consiste em recobrir uma superfície bidimensional, finita ou infinita, empregando como unidades básicas polígonos ou outras figuras, congruentes ou não, de maneira que não existam espaços entre as unidades básicas de recobrimento e/ou sobreposições das unidades básicas de recobrimento [1].

As tesselações estão presentes na arquitetura antiga e também na arte moderna. Quanto à esta última, destacam-se as obras de Maurits Cornelis Escher (1898-1972) [7], artista gráfico holandês mundialmente famoso por suas xilogravuras e litografias que brincam com o preenchimento regular do plano euclidiano, exploram concepções do infinito (principalmente no disco) e usam transformações geométricas.

Uma tesselação no plano hiperbólico é uma decomposição deste em polígonos hiperbólicos, de maneira que os polígonos cubram o plano hiperbólico e tenham em comum somente vértices e lados. Podemos construir tesselações hiperbólicas no disco de Poincaré com o GeoGebra [10, 11]. Contudo, as ferramentas hiperbólicas não constam no menu básico do GeoGebra. As ferramentas hiperbólicas

1. *HypCircle*,
2. *HypDistance*,
3. *HypRay*,
4. *HypSegment* e
5. *HypLine*,

ilustradas na Figura 4, podem ser baixadas de Christersson [5] e agregadas ao GeoGebra.

Atividade 3.1. *Construir uma tesselação com triângulos hiperbólicos no disco de Poincaré empregando as ferramentas hiperbólicas do GeoGebra.*

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0487

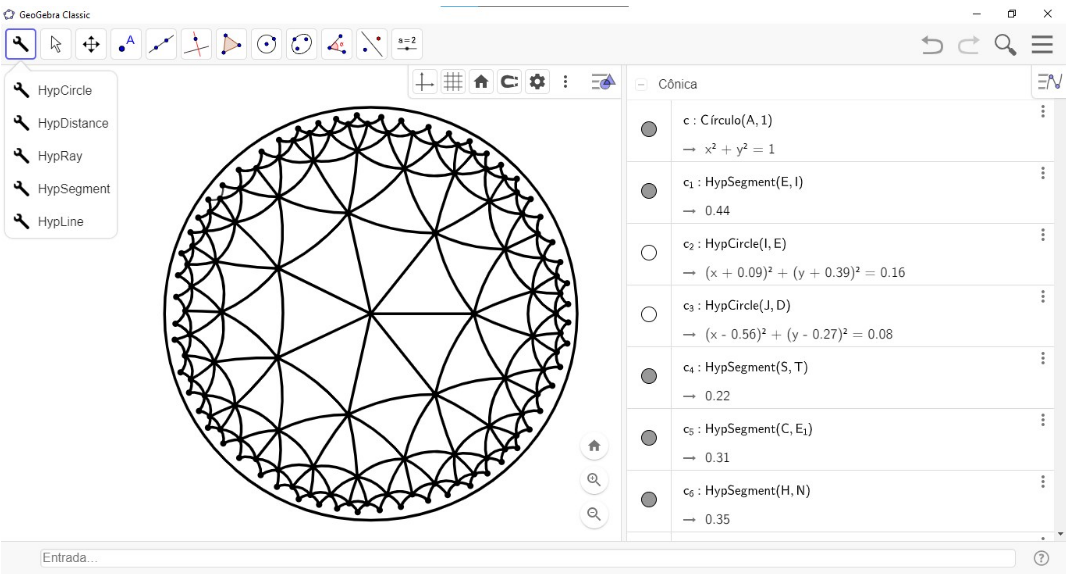


Figura 4: Tela do GeoGebra com as ferramentas hiperbólicas básicas [1, 2].

Empregando o conceito de círculo hiperbólico e as ferramentas hiperbólicas ilustradas na Figura 4, construímos uma tesselação com triângulos hiperbólicos no disco de Poincaré. A Figura 5 ilustra algumas etapas da construção, cujo passo a passo está descrito em https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/55907/40947.

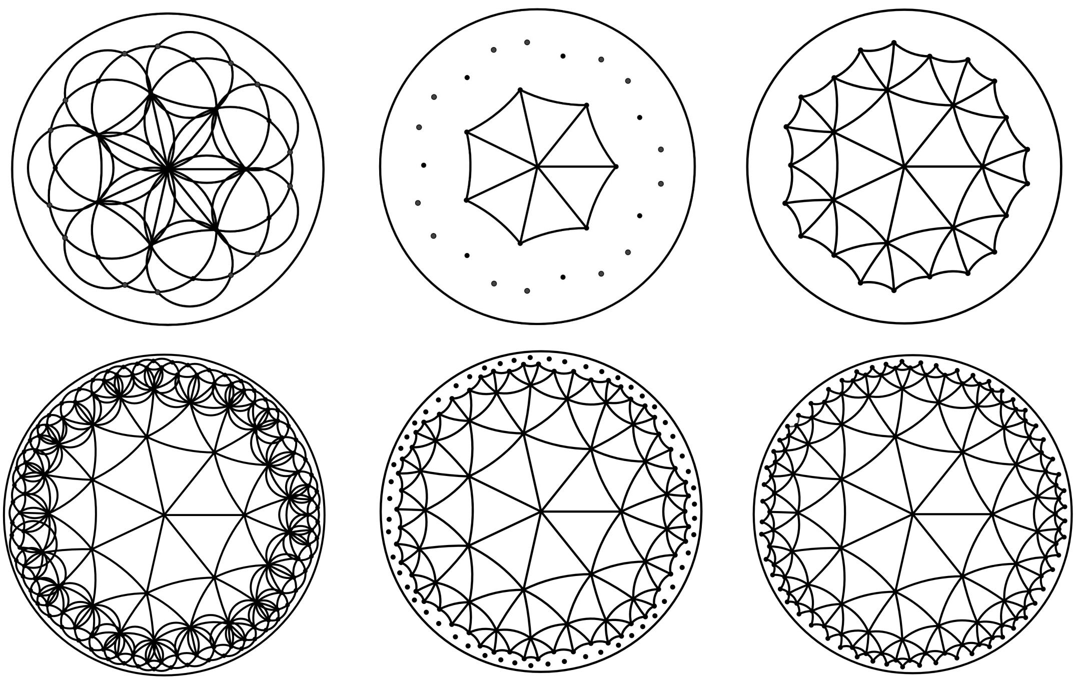
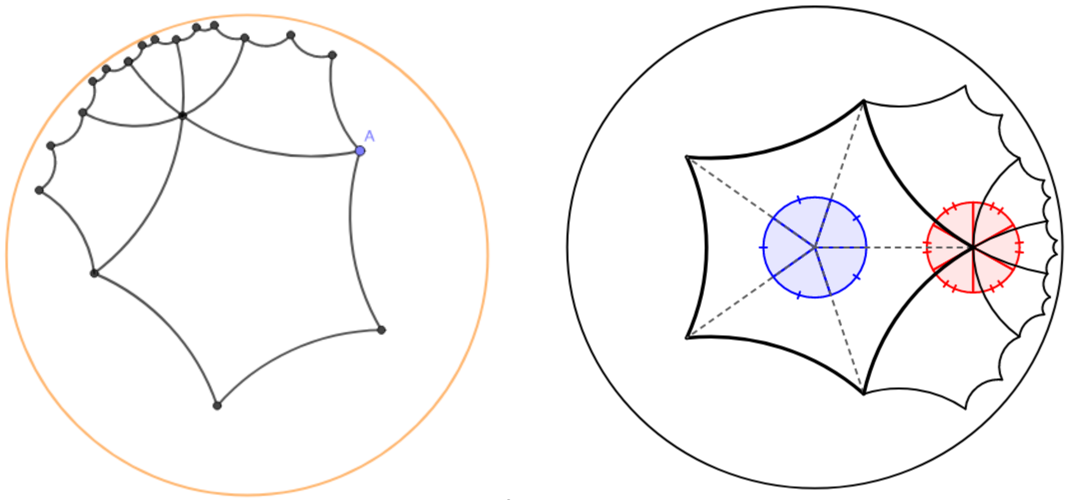


Figura 5: Tesselação com triângulos hiperbólicos no disco de Poincaré [1, 2].

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0487

Podemos recobrir o disco de Poincaré utilizando outros polígonos hiperbólicos [3]. A Figura 6 ilustra etapas da tesselação com pentágonos hiperbólicos [6].



3

Figura 6: Tesselação com pentágonos hiperbólicos no disco de Poincaré [6].

4 Considerações Finais

Propomos neste trabalho uma atividade de tesselação hiperbólica no disco de Poincaré utilizando as ferramentas hiperbólicas do GeoGebra. Para tanto, caracterizamos inicialmente o disco de Poincaré e apresentamos as definições de reta hiperbólica, de polígono hiperbólico e de círculo hiperbólico.

Em nossa proposta de atividade, planejada para a Licenciatura em Matemática, enumeramos um passo a passo para que o(a) leitor(a) interessado(a) possa reproduzir a tesselação no GeoGebra, o que a diferencia das interações dinâmicas disponíveis na literatura [19].

Almejamos que este trabalho motive estudantes e professores(as) a empregar o GeoGebra para estudar geometrias não euclidianas, particularmente o disco de Poincaré, relacionando assim matemática e arte e desenvolvendo o que propõem a BNCC e o RCEMP sobre o uso de tecnologias digitais no ensino de matemática.

Referências

[1] A. J. D. Albon. **A geometria do disco de Poincaré**. Trabalho de Conclusão de Curso, UTFPR, Curitiba, 2021. Acessado em 17/01/2024, `https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/29010/1/modelodiscopoincare.pdf`.

[2] A. J. D. Albon e R. L. Nós. "Construindo tesselações hiperbólicas no disco de Poincaré com o GeoGebra". Em: **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo** 11(2) (2022), pp. 017–032. DOI: `https://doi.org/10.23925/2237-9657.2022.v11i2p017-032`.

[3] D. A. Brannan, M. F. Esplen e J. J. Gray. **Geometry**. 2a. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2012. ISBN: 978-1107647831.

[4] Brasil. **BNCC (Base Nacional Comum Curricular)**. Online. Acessado em 17/01/2024, http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf.

[5] M. Christersson. **Basic hyperbolic tools**. Online. Acessado em 04/02/2024, https://www.geogebra.org/m/ta6nsfcd.

[6] M. Christersson. **Non-euclidean geometry: interactive hyperbolic tiling in the Poincaré disc**. Online. Acessado em 09/02/2024, http://www.malinc.se/noneuclidean/en/poincaretiling.php.

[7] M. C. Escher Company. **M. C. Escher - The official website**. Online. Acessado em 09/02/2024, https://mcescher.com/.

[8] Euclides. **Os elementos**. 1a. ed. São Paulo: Unesp, 2009. ISBN: 978-85-7139-935-8.

[9] H. Eves. **Introdução à história da matemática**. 5a. ed. Campinas: Unicamp, 2011. ISBN: 85-268-0657-2.

[10] GeoGebra. **Baixar aplicativos GeoGebra**. Online. Acessado em 23/01/2024, https://www.geogebra.org/download?lang=pt.

[11] GeoGebra. **O que é o GeoGebra?** Online. Acessado em 23/01/2024, https://www.geogebra.org/about.

[12] A. Hall e S. Pais. "Learning and teaching symmetry by creating ceramic panels with Escher type tessellations". Em: **Indagatio Didactica** 10(2) (2018), pp. 85–107.

[13] M. R. Leitão. "Tesselações no ensino de geometria euclidiana". Dissertação de mestrado. Universidade Federal do Ceará, 2015.

[14] G. P. Motta e R. L. Nós. "Explorando conceitos e relações de geometria esférica na Licenciatura em Matemática com o Google Earth". Em: **Educação: teorias, métodos e perspectivas**. Ed. por Antonella Carvalho de Oliveira. Vol. 5. Artemis, 2022. Cap. 8, pp. 78–96. DOI: 10.37572/EdArt_2705225528.

[15] R. L. Nós e F. J. de Almeida. "The employment of digital technologies during the retrospective phase in the solution of geometric problems". Em: **International Journal of Human Sciences Research** 3(7) (2023), pp. 01–12. DOI: 10.22533/at.ed.558372316034.

[16] R. L. Nós e F. J. de Almeida. "Usando o Google Earth para reavaliar distâncias e áreas na solução de problemas geométricos". Em: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**. 2023, pp. 010114-1–7. DOI: https://proceedings.sbmac.org.br/sbmac/article/view/4063.

[17] R. L. Nós e G. P. Motta. "Geometria esférica na Licenciatura em Matemática". Em: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**. 2021, pp. 010420-1–7. DOI: https://doi.org/10.5540/03.2021.008.01.0420.

[18] Paraná. **Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná**. Online. Acessado em 17/01/2024, https://www.educacao.pr.gov.br/sites/default/arquivos_restritos/files/documento/2021-08/referencial_curricular_novoem_11082021.pdf.

[19] L. Szilassi. **A dynamic visualization of the hyperbolic geometry**. Online. Acessado em 09/02/2024, https://www.geogebra.org/m/ck6ecca5.

