

Estabilização de Pontos Fixos em Redes Regulares com Atrasos Temporais

Marcos D. N. Maia¹
UFRPE, Belo Jardim, PE

Resumo.

Neste trabalho estuda-se o problema da sincronização de pontos fixos em redes regulares com acoplamento difusivo e atrasos temporais. Considerando o cenário da bifurcação de Hopf, é possível estabilizar a solução síncrona ao ponto fixo instável em termos do parâmetro geral de acoplamento e do atraso temporal. Os domínios de estabilização, no espaço de parâmetros, reaparecem periodicamente de acordo com o atraso temporal. A frequência de reaparecimento é linearmente proporcional ao número de multipartições cíclicas do grafo.

Palavras-chave. Estabilidade, Sincronização, Grafos, Atrasos Temporais

1 Introdução

As redes complexas representam uma abordagem poderosa para o estudo e entendimento do funcionamento de sistemas interagentes. Exemplos surgem nos campos da neurociência, engenharia, sociologia, dentre outros [5, 7, 10].

Os atrasos temporais estão tipicamente presentes em modelos dinâmicos de redes mais realísticos com elementos interagentes. Este é o caso em redes neuronais [1], *lasers* [8], dinâmica de tráfego [6], entre outras aplicações.

Muitos sistemas naturais possuem soluções instáveis e, a estabilização delas pode ser de grande interesse. Por exemplo, a estabilização de pontos fixos instáveis encontra aplicações na dinâmica de *lasers* [9]. Uma estratégia eficiente para a estabilização de pontos fixos é introduzir um atraso temporal. Essa abordagem é não-invasiva, pois o atraso temporal não altera a solução original do sistema dinâmico.

No presente trabalho, para a estabilização das soluções de equilíbrio, a estratégia é usar as redes regulares de elementos interagentes com atraso temporal no acoplamento. Desta forma, o atraso temporal não é uma propriedade do sistema isolado, mas será devido a comunicação entres os elementos na rede. Fazendo a análise local da estabilidade das soluções de equilíbrio, é possível estudar em detalhes o controle destas soluções síncronas nas proximidades da bifurcação de Hopf. Especificamente, as principais contribuições deste artigo são:

- Obtenção de condições necessárias e suficientes para a estabilização de soluções de equilíbrio instáveis em redes regulares com atraso temporal.
- Investigação da correspondência entre a estrutura do grafo regular e o domínio de controle.

Esse artigo abordada uma versão simplificada do modelo dinâmico estudado na Ref. [3], com novidade nos exemplos, e é dividido em quatro principais seções. Na Seção 2 será apresentado o

¹marcos.maia@ufrpe.br

modelo de rede, que delimita as condições do presente estudo. Na Seção 3 estuda-se a linearização do modelo dinâmico. Na Seção 4 são apresentados os resultados principais, e na Seção 5 são trabalhadas as exemplificações da teoria.

2 Modelo Dinâmico da Rede

Nesse trabalho, estuda-se o problema da sincronização de pontos fixos em redes regulares com acoplamento difusivo e com atrasos temporais. Especificamente, considera-se o modelo dinâmico

$$\dot{\mathbf{x}}_j(t) = f(\mathbf{x}_j(t)) + \kappa \sum_{\ell=1}^N A_{j\ell} (\mathbf{x}_\ell(t - \tau) - \mathbf{x}_j(t)) \quad (1)$$

de N osciladores idênticos. A dinâmica isolada é caracterizada pela função suave $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$. As iterações são contabilizadas pela matriz de adjacência $A = [A_{\ell j}]_{\ell, j=1}^N$ em que $A_{\ell j} = 1$ se existe uma conexão do nó ℓ ao nó j e $A_{\ell j} = 0$ caso contrário. O parâmetro $\kappa > 0$ é um acoplamento global (único) e $\tau > 0$ representa o atraso temporal da iteração entre os nós, também único para todos os nós interagentes. O caso de acoplamentos distintos, isto é, $\kappa = \kappa_{\ell j}$, pode ser tratado usando-se uma função de iteração entre os nós. Este seria um modelo ainda mais realista, porém necessita de uma análise qualitativa mais abrangente [3].

Suposição 2.1. *A dinâmica isolada é caracterizada pela função suave $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$, a qual apresenta um único ponto fixo instável com bifurcação de Hopf. Os únicos autovalores instáveis da matriz Jacobiana de $f(\mathbf{x})$ no ponto fixo são $\alpha \pm \beta i$, com $0 < \alpha \ll 1$.*

Suposição 2.2. *O grafo correspondente a matriz de adjacência no modelo (1) será considerado d -regular e fortemente conexo.*

Com a Suposição 2.2, a Teoria de Perron-Frobenius pode ser utilizada para caracterizar os autovalores da matriz de adjacência. Especificamente, se σ_A é o raio espectral de A , então os autovalores $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}$ no círculo espectral são da forma

$$\sigma_q = d \cdot \exp\left(\frac{2\pi q i}{m}\right),$$

em que i é a unidade imaginária. O número m é chamado de *índice de imprimitividade*, e com a Suposição 2.2, esse índice representa o número de multi-partições cíclicas do grafo.

3 Equação Variacional

A linearização da Eq. (1) nas proximidades da solução de equilíbrio $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ será

$$\dot{\psi}(t) = J_f \psi(t) - \kappa d_j \psi(t) + \kappa \sum_{\ell=1}^N A_{j\ell} \psi(t - \tau) \quad (2)$$

onde $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^* + \psi(t)$ e J_f é a matriz Jacobiana de $f(\mathbf{x})$ avaliada em \mathbf{x}^* e d_j é o grau do vértice j .

Na forma bloco-matricial, a Eq. (2) se lê

$$\dot{\Psi}(t) = [I_N \otimes J_f - \kappa(D \otimes I_s)]\Psi(t) + \kappa(A \otimes I_s)\Psi(t - \tau) \quad (3)$$

onde $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_N)^T$, I_s é a matriz identidade de tamanho s , $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_N)$ e \otimes representa o produto de Kronecker.

Utilizando a Suposição 2.2, a matriz de adjacência induz naturalmente uma mudança de coordenadas. Seja $A = R\Lambda R^{-1}$ com $\Lambda = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N)$ contendo os autovalores de A . Aplicando a mudança de variável $\xi(t) = (R^{-1} \otimes I_s)\Psi(t)$, a Eq. (3) fica

$$\dot{\xi}(t) = [I_N \otimes J_f - \kappa d(I_N \otimes I_s)]\xi(t) + \kappa(\Lambda \otimes I_s)\xi(t - \tau), \quad (4)$$

a qual é separável em N equações diferenciais lineares com atraso, desacopladas:

$$\dot{\xi}_j(t) = [J_f - \kappa d I_s]\xi_j(t) + \kappa \sigma_j \xi_j(t - \tau). \quad (5)$$

O *espectro* da Eq. (5) consiste dos números complexos λ , correspondentes à solução particular $\xi_j(t) = e^{\lambda t} v_j$, com $v_j \in \mathbb{R}^s$. A parte real de λ determina a estabilidade da solução trivial $\xi_j(t) \equiv 0$, que por sua vez determina a estabilidade local da solução de equilíbrio $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ da Eq. (1).

Substituindo $\xi_j(t) = e^{\lambda t} v_j$ na Eq. (5), obtemos o problema de autovalor e autovetor

$$(-\lambda I_s + J_f - \kappa d I_s + \kappa \sigma_j e^{-\lambda \tau} I_s)v_j = \mathbf{0}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (6)$$

o qual se desbrocha em sua equação característica transcendental

$$-\lambda + \alpha \pm i\beta - \kappa d + \kappa d e^{-\lambda \tau + 2\pi q i/m} = 0, \quad (7)$$

onde $q = 1, 2, \dots, m$, $\alpha \pm \beta i$ são os autovalores instáveis de J_f , em acordo com a Suposição 2.1. Para a obtenção da Eq. (7), foram utilizados apenas os autovalores $\sigma_q = \exp\left(\frac{2\pi q i}{m}\right)$ no círculo espectral da matriz de adjacência, pois eles lideram os modos mais instáveis, uma vez que a parte real de λ é uma função estritamente crescente em relação a $|\sigma_j|$ [3]. A Eq. (7) pode ser resolvida numericamente com o uso da função W de Lambert:

$$\lambda = \alpha - \kappa d + i\beta + (1/\tau)W(\tau \kappa d \exp(2\pi q i/m - \tau(\alpha - \kappa d + i\beta))). \quad (8)$$

Mais detalhes sobre a função W de Lambert e a passagem da Eq. (7) para a Eq. (8) podem ser encontrados em [4]. A Eq. (8) é utilizada para produzir o mapa de cores das ilhas de estabilidade, apresentados nas Fig. 1 e 3, de modo que as áreas coloridas são aquelas em que $\Re(\lambda) < 0$.

4 Análise da Bifurcação

Além da abordagem numérica, a Eq. (7) pode ser analisada a partir da bifurcação do valor espectral $\lambda = \gamma + i\omega$, isto é, $\gamma = 0$. Tomando o módulo na Eq. (7) e fazendo $\gamma = 0$, obtemos os valores imaginários puros na bifurcação:

$$\omega_{\pm} = \beta \pm \sqrt{2\kappa d \alpha - \alpha^2}. \quad (9)$$

As partes real e imaginária da Eq. (7) podem ser separadas da forma

$$-\gamma + \alpha - \kappa d + \kappa d e^{-\gamma \tau} \cos(-\omega \tau + 2\pi p/m) = 0.$$

e

$$-\omega + \beta + \kappa d e^{-\gamma \tau} \sin(-\omega \tau + 2\pi p/m) = 0, \quad (10)$$

com $p = 0, 1, \dots$. Agora, resolvendo a Eq. (10) para $\omega = \omega_{\pm}$ e $\gamma = 0$, obtemos duas curvas no plano $\tau \times \kappa$ (atraso \times acoplamento) da forma

$$\tau_{\pm}(\kappa, p) = \frac{\frac{2\pi p}{m} - \arcsin\left(\frac{\omega_{\pm} - \beta}{\kappa d}\right)}{\omega_{\pm}}. \quad (11)$$

Teorema 4.1. *Considerando as Suposições 2.1 e 2.2, a solução de equilíbrio da Eq. (1) é localmente exponencialmente estável dentro das regiões no plano $\tau \times \kappa$, chamadas de ilhas de estabilidade, delimitadas pelas curvas da Eq. (11), sempre que elas se intersectam.*

Somando-se as Equações (11) nos pontos em que as curvas se intersectam, então tem-se a seguinte relação para os pontos de intersecção das curvas:

$$\tau_p = \frac{\pi(2p + 1)}{\beta m}, \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

Observação 4.1. *De acordo com a Eq. (12), a frequência do reaparecimento das ilhas de estabilidade é inversamente proporcional ao número de multipartições cíclicas do grafo.*

5 Exemplos

Serão considerados dois exemplos. O primeiro representando um caso bidimensional (Seção 5.1) e o segundo representando um caso tridimensional (Seção 5.2).

5.1 Osciladores de Van der Pol

Considere que o sistema isolado, isto é, a parte $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ na Eq. (1), é o oscilador de Van der Pol. Seu campo de vetores $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ pode ser escrito como

$$f(x_1, x_2) = (x_2, \mu(1 - x_1^2)x_2 - x_1)$$

em que μ é um parâmetro que controla o amortecimento.

A origem $(0, 0)$ é o único ponto fixo do sistema de Van der Pol. A bifurcação de Hopf acontece em $\mu = 0$. Para $\mu < 0$ a origem é localmente estável e instável para $\mu > 0$, o que dá origem a uma orbita periódica. A matriz Jacobiana de f na origem é

$$J_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix},$$

e seus autovalores são $\mu/2 \pm \sqrt{\mu^2 - 4}/2$, e assim $\alpha = \mu/2$ e $\beta = \sqrt{4 - \mu^2}/2$, na Suposição 2.1. Como considera-se $0 < \mu \ll 1$, então a solução de equilíbrio $(0, 0)$ é instável, mas que pode ser estabilizada com a interação dos elementos de uma rede regular com atraso temporal.

Considerando dois osciladores acoplados, segundo o modelo (1), e com dinâmica isolada dada pelo sistema de Van der Pol, obtém-se o diagrama de estabilidade apresentado na Figura 1.

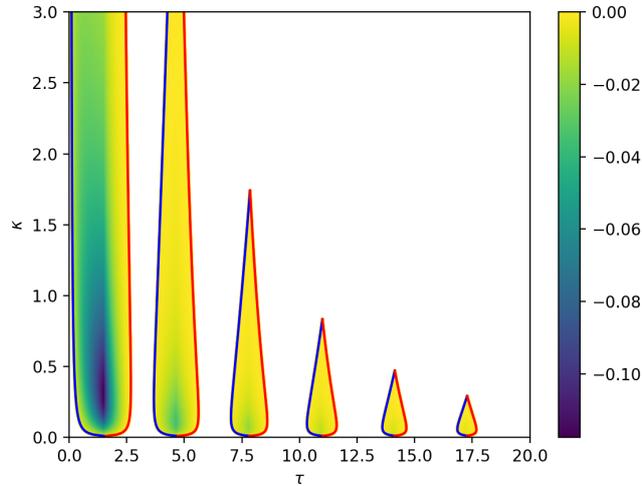


Figura 1: Ilhas de estabilidade para dois osciladores de Van der Pol acoplados. O parâmetro considerado foi $\mu = 0.02$ e portanto $\alpha = 0.01$ e $\beta = 0.99$. A região colorida é obtida numericamente usando a Eq. (8) e a faixa de cores representa a magnitude de $\Re(\lambda) < 0$. As fronteiras das ilhas são obtidas pela Eq. (11). Fonte: do autor.

Na Figura 1 foram plotados em azul e vermelho as curvas dadas pela Eq. (11), apenas entre seus pontos de interseção. A escala de cores representa a magnitude da parte real de λ na Eq. (8), obtido numericamente. Parte das duas primeiras ilhas de estabilidade não são exibidas pois elas se estendem para parâmetros de acoplamentos elevados.

Os pontos de reaparecimento das ilhas são corretamente previstos pela função discreta $\tau(p) \approx p\pi + \pi/2$, $p = 0, 1, 2, \dots$, de acordo com a Eq. (12), onde $m = 2$ e $\beta = 0.99$.

5.2 Bifurcação de Hopf em um sistema tridimensional

Considere o sistema tridimensional a seguir como sistema isolado, isto é, a parte $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ na Eq. (1), com $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Este representa o acoplamento caótico de dois subsistemas mais simples [2]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2x - by - 3 \sin(z), \\ \dot{y} &= 2x - 2y + \sin(x), \\ \dot{z} &= -2z + 15 \sin(y). \end{aligned} \tag{13}$$

Com essa escolha de coeficientes, o sistema (13) possui bifurcação de Hopf, dependente do parâmetro $b > 0$. A origem $(0, 0, 0)$ é uma solução de equilíbrio e a matriz Jacobiana do campo de vetores, avaliada nesse ponto, é

$$J_f = \begin{bmatrix} -2 & -b & -3 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 15 & -2 \end{bmatrix},$$

cujos autovalores são as raízes da equação cúbica

$$(-2 - \mu)[(-2 - \mu)^2 + 3b] - 135 = 0. \tag{14}$$

Calculando numericamente as raízes μ da Eq. (14), verifica-se que a bifurcação de Hopf ocorre para $b_0 \approx 5.9165$, de modo que se $b < b_0$, observa-se uma órbita periódica estável e para $b > b_0$ a

origem é a solução de equilíbrio estável. Usando $b = 5.8$, os autovalores de J_f são $\mu_1 \approx -6.0213$ e $\mu_{2,3} \approx 0.0107 \pm 5.4340i$. Desse modo, a Suposição 2.1 é satisfeita com $\alpha = 0.0107$ e $\beta = 5.4340$.

Considerando-se os grafos da Fig. 2, verifica-se que o grafo da Fig. 2 (a) é 2-regular e bipartido, tendo portanto, índice de imprimitividade $m = 2$. Já o grafo da Fig. 2 (b) é 1-regular e possui quatro partições cíclicas, tendo neste caso $m = 4$. Esta pequena diferença na maneira como os vértices estão conectados faz com que os domínios de controle sejam bastante distintos um do outro, em relação a frequência de reaparecimento das ilhas de estabilização, como mostra a Figura 3.

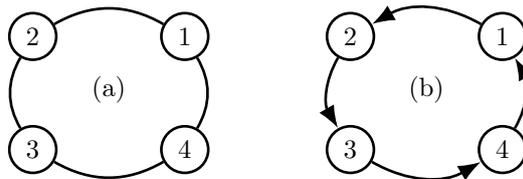


Figura 2: (a) Grafo regular não-direcionado tipo anel com quatro vértices; (b) Grafo regular direcionado tipo anel com quatro vértices. Fonte: do autor.

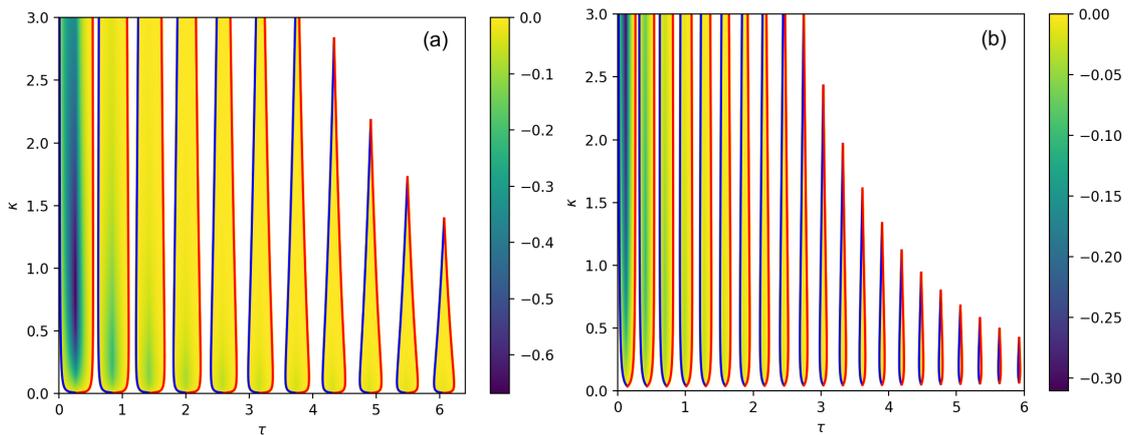


Figura 3: Ilhas de estabilidade para quatro osciladores acoplados na configuração tipo anel com um sistema tridimensional. À esquerda estão as ilhas de estabilidade correspondentes ao grafo da Fig. 2 (a), e à direita estão representadas as ilhas de estabilidade correspondentes ao grafo da Fig. 2 (b). Os parâmetros utilizados para ambos os casos foram $\alpha = 0.0107$ e $\beta = 5.4340$. As fronteiras das ilhas são obtidas através da Eq. (11) e a região colorida é obtida numericamente usando a Eq. (8) e a faixa de cores representa a magnitude de $\Re(\lambda) < 0$. Fonte: do autor.

Nota-se que o domínio de controle é sensivelmente afetado pelo número de multipartições cíclicas do grafo. Como o grafo da Fig. 2 (b) tem o dobro de partições cíclicas em relação ao grafo da Fig. 2 (a), então espera-se aproximadamente o dobro de ilhas de estabilidade dentro de um mesmo intervalo de atraso temporal, como prevê a Eq. (12) e evidenciado na Fig. 3. Além disso, quanto maior o número de multipartições no grafo mais dificultada será a estabilização do sistema.

6 Considerações Finais

Considerando-se o cenário de redes regulares com acoplamento atrasado, verifica-se que a estabilização de soluções síncronas de ponto fixo é possível (considerando a dinâmica isolada próxima da bifurcação de Hopf), a depender da escolha do parâmetro de acoplamento e atraso temporal.

Verifica-se que a estabilização acontece em ilhas dentro do domínio de acoplamento e atraso temporal, e a frequência com que essas ilhas aparecem, dentro de um mesmo intervalo de atraso temporal, é proporcional ao número de multi-partições cíclicas do grafo. Apesar do aparecimento de mais ilhas, estas se tornam mais estreitas e desaparecem rapidamente com o aumento do atraso. Desse modo, a estabilização se torna cada vez mais difícil a medida que aumenta-se o atraso temporal ou o número de multipartições do grafo.

Referências

- [1] G. Deco, V. Jirsa, A. R. McIntosh, O. Sporns e R. Kotter. “Key role of coupling, delay, and noise in resting brain fluctuations”. Em: **Proceedings of the National Academy of Sciences** 106.25 (2009), pp. 10302–10307.
- [2] E. Y. Kutorzi e S. Yufeng. “Hopf bifurcation in three-dimensional based on chaos entanglement function”. Em: **Chaos, Solitons & Fractals: X** 4 (2019), p. 100027.
- [3] D. Maia, J. Kurths e S. Yanchuk. “Stabilization of synchronous equilibria in regular dynamical networks with delayed coupling”. Em: **Nonlinear Dynamics** 111 (2023).
- [4] M. D. N. Maia. “Synchronization and control in networks with strongly time-delayed couplings”. Tese de doutorado. INPE, 2017. URL: <http://urlib.net/sid.inpe.br/mtc-m21b/2017/09.12.20.07>.
- [5] M. E. J. Newman, A. L. Barabási e D. J. Watts. “The structure and dynamics of networks”. Em: **The Structure and Dynamics of Networks** 9781400841 (2011), pp. 1–582. ISSN: 0022-4715.
- [6] G. Orosz, R. Wilson e G. Stepan. “Traffic jams: dynamics and control”. Em: **Phil. Trans. R. Soc. A** 368 (2010), pp. 4455–4479.
- [7] Y. Serhiy, A. C. Roque, E. E. N. Macau e J. Kurths. “Dynamical phenomena in complex networks: fundamentals and applications”. Em: **The European Physical Journal Special Topics** 230.14-15 (2021), pp. 2711–2716.
- [8] M. C. Soriano, J. García-Ojalvo, C. R. Mirasso e I. Fischer. “Complex photonics: Dynamics and applications of delay-coupled semiconductor lasers”. Em: **Reviews of Modern Physics** 85.1 (2013), pp. 421–470.
- [9] V. Z. Tronciu, H. J. Wünsche, M. Wolfrum e M. Radziunas. “Semiconductor laser under resonant feedback from a Fabry-Perot resonator: Stability of continuous-wave operation”. Em: **Phys. Rev. E** 73 (2006).
- [10] C. W. Wu. **Synchronization in Complex Networks of Nonlinear Dynamical Systems**. World Scientific, 2007, p. 155.