

# Teoria Cinética dos Gases aplicada ao Cálculo Numérico dos Coeficientes de Salto de Pressão e Temperatura para Problemas de Transição de Fase

Denize Kalempa<sup>1</sup>

EEL/USP, Lorena, SP

Irina Graur<sup>2</sup>

IUSTI/AMU, Marseille, França

**Resumo.** O objetivo do presente trabalho é calcular numericamente os coeficientes de salto de pressão e temperatura usados nas condições de contorno para resolver as equações de Navier-Stokes-Fourier em problemas de transição de fase em sistemas com baixa ou moderada rarefação do gás. A modelagem é feita com base em um modelo cinético para a equação de Boltzmann linearizada com condição de contorno de completa e incompleta evaporação/condensação na interface. O método de velocidades discretas é utilizado para resolver o problema numericamente. Como resultados, os coeficientes de salto de pressão e temperatura são apresentados para diferentes valores do coeficiente de evaporação/condensação na interface.

**Palavras-chave.** Equação de Boltzmann, Gás Rarefeito, Saltos de Pressão e Temperatura, Transição de Fase.

## 1 Introdução

Métodos de teoria cinética dos gases baseados na solução da equação de Boltzmann [2, 5] e no método de simulação de Monte Carlo [3] têm sido amplamente utilizados para descrever os fenômenos de transporte em sistemas gasosos, e.g. em microssistemas eletrônicos e mecânicos, aerotermodinâmica de satélites, transporte de aerossóis na atmosfera, entre outros. O número de Knudsen ( $Kn$ ), definido como a razão entre o livre caminho médio molecular e um comprimento característico do sistema em estudo, é o parâmetro utilizado para caracterizar o grau de rarefação do gás. Para sistemas gasosos com  $Kn \ll 1$  (regime contínuo), as equações de Navier-Stokes-Fourier com condições de contorno apropriadas podem ser utilizadas para resolver problemas que envolvem escoamentos de gases rarefeitos. Entretanto, quando  $Kn \gg 1$  (regime de moléculas livres) ou  $Kn \sim 1$  (regime de transição), outras abordagens devem ser utilizadas, e.g. métodos de teoria cinética dos gases ou dinâmica molecular.

Em problemas que envolvem transição de fase em sistemas com baixa ou moderada rarefação do gás, correspondendo a  $0 < Kn \leq 0.1$ , as equações de Navier-Stokes-Fourier podem ser resolvidas com condições de contorno de salto de temperatura e pressão na interface. A condição de continuidade da pressão e da temperatura na interface não é válida pois existem saltos dessas grandezas em condições de não-equilíbrio termodinâmico. Assim, os coeficientes de salto de pressão e temperatura obtidos via teoria cinética dos gases devem ser utilizados nas condições de contorno para resolver as equações da mecânica dos meios contínuos. Geralmente, os valores obtidos por Cipola *et*

---

<sup>1</sup>kalempa@usp.br

<sup>2</sup>irina.martin@univ-amu.fr

al. [4] para esses coeficientes são utilizados. Porém, há escassez de dados na literatura para estes coeficientes e, atualmente, sabemos que estes coeficientes dependem da curvatura da superfície, da concentração de outras espécies gasosas que não sofrem transição de fase mas interferem no processo, etc. Portanto, estudos nessa temática devem ser incentivados.

No presente trabalho, os coeficientes de salto de pressão e temperatura são calculados numericamente com base em um modelo cinético para a equação de Boltzmann linearizada. Os modelos cinéticos tem como objetivo simplificar o termo colisional da equação de Boltzmann mantendo as suas propriedades fundamentais, correspondendo à conservação de massa, momentum e energia, e o teorema H de Boltzmann que equivale à segunda lei da termodinâmica. Os modelos propostos por Bhatnagar, Gross e Krook [8] e Shakhov [9] são os mais utilizados e existe uma vasta literatura que comprova a confiabilidade desses modelos para descrever vários problemas de interesse prático. Para problemas que envolvem ambas as transferências de massa e calor, o modelo de Shakhov é o mais apropriado. Por isso, como o presente trabalho envolve transição de fase, utilizamos o modelo de Shakhov. Como condição de contorno, assumimos completa e incompleta transição de fase na interface de modo que os coeficientes são tabelados em função de um coeficiente de evaporação/condensação que indica a fração do número de moléculas que sofreu transição da fase.

## 2 Formulação do Problema

Consideramos um gás no espaço semi-infinito  $x' \geq 0$  limitado por um plano da sua fase condensada em  $x' = 0$ . O líquido tem uma temperatura  $T_0$  e a pressão de saturação é  $p_0$ . A densidade numérica de vapor saturado à temperatura  $T_0$  é  $n_0$ . Longe da interface vapor-líquido o gás está em equilíbrio termodinâmico com pressão  $p_\infty$ , temperatura  $T_\infty$ , densidade  $n_\infty$  e velocidade  $(U_\infty, 0, 0)$ . A transição de fase ocorre devido a pequenos gradientes de pressão e temperatura no vapor, na direção  $x'$ , dados por

$$X_P = \left| \frac{\ell_0}{p_0} \frac{dp}{dx'} \right| \ll 1, \quad X_T = \left| \frac{\ell_0}{T_0} \frac{dT}{dx'} \right| \ll 1, \quad (1)$$

com  $\ell_0 = \mu_0 v_0 / p_0$  denotando um comprimento equivalente ao livre caminho médio molecular.  $\mu_0$  é a viscosidade do gás à temperatura  $T_0$  e  $v_0 = \sqrt{2kT_0/m}$  é a velocidade mais provável das moléculas gasosas,  $k$  é a constante de Boltzmann e  $m$  a massa molecular.

Longe da fase condensada, ou seja, no limite  $x' \rightarrow \infty$ , a pressão do gás é constante, mas a temperatura e a densidade do gás são funções lineares em  $x'$  dadas por:

$$T(x') = T_w \left( 1 + \frac{x'}{\ell_0} X_T \right), \quad n(x') = n_w \left( 1 - \frac{x'}{\ell_0} X_T \right). \quad (2)$$

$T_w$  and  $n_w$  denotam a temperatura e a densidade do vapor na superfície líquida e são dados por

$$T_w = T_0(1 + \epsilon_T), \quad n_w = n_0(1 + \epsilon_n). \quad (3)$$

$\epsilon_T$  e  $\epsilon_n$  são os coeficientes de salto de temperatura e densidade na interface vapor-líquido. Estes coeficientes são calculados do ponto de vista macroscópico, ou seja, fora da camada de Knudsen, da seguinte forma:

$$\epsilon_T = \lim_{x' \rightarrow \infty} \left[ \frac{T(x') - T_{NJ}(x')}{T_0} \right], \quad \epsilon_n = \lim_{x' \rightarrow \infty} \left[ \frac{n(x') - n_{NJ}(x')}{n_0} \right], \quad (4)$$

na qual as grandezas com índice  $NJ$  (*No Jump*) são calculadas de (2) assumindo que  $T_w = T_0$  e  $n_w = n_0$ . É importante notar que os coeficientes de salto de temperatura e pressão são utilizados nas condições de contorno em  $x' = 0$ , mas no presente trabalho eles são calculados fora da camada

de Knudsen. Isso é justificado pelo fato de que a espessura da camada de Knudsen é muito pequena, de modo que estamos extrapolando o perfil da temperatura e da densidade para o interior da camada de Knudsen.

O coeficiente de salto de pressão é dado por  $\epsilon_p = \epsilon_T + \epsilon_n$ .

O objetivo é calcular os coeficientes de salto de temperatura e pressão numericamente via solução do modelo de Shakhov [9] para a equação de Boltzmann linearizada.

### 3 Método de Solução

#### 3.1 Equação Cinética

A linearização da equação de Boltzmann é feita representando a função de distribuição de velocidades moleculares da seguinte forma:

$$f(x, \mathbf{c}) = f_0[1 + h^{(T)}(x, \mathbf{c})X_T + h^{(u)}(x, \mathbf{c})X_u], \quad (5)$$

com  $h^{(T)}(x, \mathbf{c})$  e  $h^{(u)}(x, \mathbf{c})$  denotando as chamadas funções de perturbação devidas às forças termodinâmicas  $X_T$  e  $X_u$  definidas como

$$X_T = \left| \frac{1}{\ell_0} \frac{dT_\infty}{dx} \right| \ll 1, \quad X_u = \left| \frac{U_\infty}{v_0} \right| \ll 1. \quad (6)$$

Por conveniência, introduzimos a coordenada  $x$  e a velocidade molecular  $\mathbf{c}$  adimensionais, definidas como  $x = x'/\ell_0$  e  $\mathbf{c} = \mathbf{v}/v_0$ .

A função

$$f_0 = n_0 \left( \frac{m}{2\pi kT_0} \right)^{3/2} e^{-c^2} \quad (7)$$

é a função de Maxwell na interface.

Usando a representação (5), o modelo de Shakhov para a equação de Boltzmann é escrito da seguinte forma:

$$c_x \frac{\partial h^{(i)}}{\partial x} = \nu^{(i)} + \left( c^2 - \frac{3}{2} \right) \tau^{(i)} + 2c_x u_x^{(i)} + \frac{4}{15} c_x \left( c^2 - \frac{5}{2} \right) q_x^{(i)} - h^{(i)}, \quad i = T, u, \quad (8)$$

com as grandezas

$$\nu^{(i)}(x) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int h^{(i)}(x, \mathbf{c}) e^{-c^2} d\mathbf{c}, \quad (9)$$

$$\tau^{(i)}(x) = \frac{2}{3\pi^{3/2}} \int \left( c^2 - \frac{3}{2} \right) h^{(i)}(x, \mathbf{c}) e^{-c^2} d\mathbf{c}, \quad (10)$$

$$u_x^{(i)}(x) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int c_x h^{(i)}(x, \mathbf{c}) e^{-c^2} d\mathbf{c}, \quad (11)$$

$$q_x^{(i)}(x) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int c_x \left( c^2 - \frac{5}{2} \right) h^{(i)}(x, \mathbf{c}) e^{-c^2} d\mathbf{c}, \quad (12)$$

correspondendo aos desvios de densidade e temperatura dos valores na interface, velocidade hidrodinâmica e fluxo de calor na direção  $x$  devidos a cada força termodinâmica.

### 3.2 Condição de Contorno

Assumimos que uma fração  $\sigma$  das moléculas incidentes na superfície líquida condensa e depois evapora com função Maxwelliana dada em (7). A fração  $1 - \sigma$  sofre reflexão difusa. Assim, de acordo com a Ref. [7], a função de distribuição das moléculas emitidas da interface é escrita da seguinte forma:

$$f(0, \mathbf{c}) = \sigma f_0 + (1 - \sigma) f_r, \quad c_x > 0, \quad (13)$$

na qual  $f_r = n_r f_0 / n_0$  é a função de distribuição das moléculas que não sofrem transição de fase e são refletidas difusamente da interface. Após introduzir a representação (5) em (13) obtemos:

$$h^{(i)}(0, \mathbf{c}) = -(1 - \sigma) \xi^{(i)}, \quad i = T, u, \quad (14)$$

com

$$\xi^{(i)} = \frac{2}{\pi} \int_{c_x < 0} c_x h^{(i)}(0, \mathbf{c}) e^{-c^2} d\mathbf{c} \quad (15)$$

obtido da condição de impermeabilidade na interface para as moléculas que não sofrem transição de fase.

### 3.3 Comportamento Assintótico

Longe da interface vapor-líquido, ou seja, no limite  $x \rightarrow \infty$ , a função de distribuição de velocidades moleculares é dada pela solução de Chapmann-Enskog, cujos detalhes podem ser encontrados na Ref. [1], a qual é dada por:

$$f = f_\infty [1 + h_{CE}^{(T)} X_T + h_{CE}^{(u)} X_u], \quad (16)$$

com

$$f_\infty = n_\infty \left( \frac{m}{2\pi k T_\infty} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{m}{2k T_\infty} (\mathbf{v} - \mathbf{U}_\infty)^2 \right]. \quad (17)$$

$T_\infty$  e  $n_\infty$  são dados em (2). Após um algebrismo matemático, a seguinte relação entre as funções de Maxwell  $f_\infty$  e  $f_0$ , definida em (7), é obtida

$$f_\infty = f_0 \left[ 1 + \epsilon_n + \left( c^2 - \frac{3}{2} \right) \epsilon_T + x \left( c^2 - \frac{5}{2} \right) X_T + 2c_x X_u \right]. \quad (18)$$

Substituindo (16) na equação cinética de Shakhov, as funções de perturbação de Chapmann-Enskog são obtidas como:

$$h_{CE}^{(T)} = -\frac{3}{2} c_x \left( c^2 - \frac{5}{2} \right), \quad h_{CE}^{(u)} = 0. \quad (19)$$

Finalmente, usando a relação (18) e a representação (5), os comportamentos assintóticos das funções de interesse são escritos como:

$$h^{(T)}(x, \mathbf{c}) = \epsilon_n^{(T)} + \left( c^2 - \frac{3}{2} \right) \epsilon_T^{(T)} + x \left( c^2 - \frac{5}{2} \right) + h_{CE}^{(T)} \quad \text{em } x \rightarrow \infty, \quad (20)$$

$$h^{(u)}(x, \mathbf{c}) = \epsilon_n^{(u)} + \left( c^2 - \frac{3}{2} \right) \epsilon_T^{(u)} + 2c_x + h_{CE}^{(u)} \quad \text{em } x \rightarrow \infty, \quad (21)$$

com  $h_{CE}^{(T)}$  e  $h_{CE}^{(u)}$  dados em (19). Note que as seguintes representações para os coeficientes de salto de densidade e temperatura foram utilizadas para obter (20) e (21):

$$\epsilon_T = \epsilon_T^{(T)} X_T + \epsilon_T^{(u)} X_u, \quad (22)$$

$$\epsilon_n = \epsilon_n^{(T)} X_T + \epsilon_n^{(u)} X_u. \tag{23}$$

Essas representações são válidas porque os coeficientes de salto são calculados em termos de grandezas macroscópicas e, em teoria cinética dos gases, qualquer grandeza macroscópica que caracteriza o sistema gasoso é calculada via função de distribuição de velocidades moleculares. Portanto, a representação (5) justifica as representações (22) e (23).

### 3.4 Método Numérico

Como as funções de perturbação  $h^{(T)}(x, \mathbf{c})$  e  $h^{(u)}(x, \mathbf{c})$  dependem de 4 variáveis correspondendo à coordenada  $x$  e às componentes  $(c_x, c_y, c_z)$  da velocidade molecular  $\mathbf{c}$ , duas novas funções foram introduzidas com o objetivo de eliminar a dependência da solução numérica em  $c_y$  e  $c_z$  e, conseqüentemente, diminuir o tempo computacional. Essas funções foram introduzidas como:

$$\phi^{(i)}(x, c_x) = \frac{1}{\pi} \int \int h^{(i)}(x, \mathbf{c}) e^{-c_y^2 - c_z^2} dc_y dc_z, \tag{24}$$

$$\psi^{(i)}(x, c_x) = \frac{1}{\pi} \int \int h^{(i)}(x, \mathbf{c}) e^{-c_y^2 - c_z^2} (c_y^2 + c_z^2 - 1) dc_y dc_z. \tag{25}$$

Desse modo, podemos reescrever as equações cinéticas dadas em (8) como um sistema de equações

$$c_x \frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial x} = \nu^{(i)} + \left( c_x^2 - \frac{1}{2} \right) \tau^{(i)} + 2c_x u_x^{(i)} + \frac{4}{15} c_x \left( c_x^2 - \frac{3}{2} \right) q_x^{(i)} - \phi^{(i)}, \quad i = T, u, \tag{26}$$

$$c_x \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial x} = \tau^{(i)} + \frac{4}{15} c_x q_x^{(i)} - \psi^{(i)}, \tag{27}$$

com

$$\nu^{(i)}(x, c_x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int \phi^{(i)} e^{-c_x^2} dc_x, \tag{28}$$

$$\tau^{(i)}(x, c_x) = \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \int \left[ \left( c_x^2 - \frac{1}{2} \right) \phi^{(i)} + \psi^{(i)} \right] e^{-c_x^2} dc_x, \tag{29}$$

$$u_x^{(i)}(x, c_x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int \phi^{(i)} c_x e^{-c_x^2} dc_x, \tag{30}$$

$$q_x^{(i)}(x, c_x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int \left[ \left( c_x^2 - \frac{3}{2} \right) \phi^{(i)} + \psi^{(i)} \right] c_x e^{-c_x^2} dc_x. \tag{31}$$

As condições de contorno dadas em (14) são escritas em termos das novas funções como:

$$\phi^{(i)}(0, c_x) = -(1 - \sigma)\xi^{(i)}, \quad c_x > 0 \tag{32}$$

$$\psi^{(i)}(0, c_x) = 0, \quad c_x > 0, \tag{33}$$

com

$$\xi^{(i)} = 2 \int_{c_x < 0} \phi^{(i)}(0, c_x) c_x e^{-c_x^2} dc_x. \tag{34}$$

Similarmente, as condições dadas em (20) e (21) para o limite  $x \rightarrow \infty$  são reescritas como:

$$\phi^{(T)}(x, c_x) = \epsilon_n^{(T)} + \left( c_x^2 - \frac{1}{2} \right) \epsilon_T^{(T)} + x \left( c_x^2 - \frac{3}{2} \right) - \frac{3}{2} c_x \left( c_x^2 - \frac{3}{2} \right), \tag{35}$$

$$\psi^{(T)}(x, c_x) = \epsilon_T^{(T)} + x - \frac{3}{2} c_x, \tag{36}$$

$$\phi^{(u)}(x, c_x) = \epsilon_n^{(u)} + \left(c_x^2 - \frac{1}{2}\right) \epsilon_T^{(u)} + 2c_x, \tag{37}$$

$$\psi^{(u)}(x, c_x) = \epsilon_T^{(u)}. \tag{38}$$

Para cada força termodinâmica, as equações acopladas (26) e (27), sujeitas às condições de contorno dadas em (32) e (33) e, também, às condições dadas em (35)-(38), foram resolvidas numericamente utilizando o método de velocidades discretas, cujos detalhes podem ser encontrados na Ref. [10]. Usando as definições dadas em (4), os coeficientes que aparecem em (22) e (23) foram calculados em termos dos desvios de temperatura e densidade como:

$$\epsilon_T^{(T)} = \lim_{x \rightarrow \infty} (\tau^{(T)} - x), \quad \epsilon_T^{(u)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \tau^{(u)}, \tag{39}$$

$$\epsilon_n^{(T)} = \lim_{x \rightarrow \infty} (\nu^{(T)} + x), \quad \epsilon_n^{(u)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \nu^{(u)}. \tag{40}$$

Note que, conforme mencionado na seção de formulação do problema, o coeficiente de salto de pressão é dado por  $\epsilon_p = \epsilon_n + \epsilon_T$ . Então, usando as representações (22) e (23), temos:

$$\epsilon_p^{(T)} = \epsilon_n^{(T)} + \epsilon_T^{(T)}, \quad \epsilon_p^{(u)} = \epsilon_n^{(u)} + \epsilon_T^{(u)}. \tag{41}$$

Os resultados encontrados para estes coeficientes são apresentação na próxima seção para alguns valores de coeficiente de evaporação/condensação  $\sigma$  e permitem analisarmos a influência do parâmetro  $\sigma$  nos saltos de pressão e temperatura na interface vapor-líquido.

## 4 Resultados

A Tabela 1 apresenta os coeficientes de salto de temperatura e pressão na interface devidos a cada força termodinâmica para alguns valores de coeficiente de evaporação/condensação  $\sigma$ . Note que  $\sigma = 1$  corresponde à completa evaporação/condensação na interface, enquanto que  $\sigma \neq 1$  significa que a fração  $\sigma$  de moléculas incidentes sofre transição de fase e o restante,  $1 - \sigma$ , sofre reflexão difusa. Os resultados obtidos para  $\sigma=1$  estão em boa concordância com os resultados das Refs. [4, 6], obtidos da solução numérica do modelo proposto por Bhatnagar, Gross e Krook [8] e usando outras abordagens numéricas.

Tabela 1: Coeficientes de salto de temperatura e pressão na interface para alguns valores de coeficiente de evaporação/condensação  $\sigma$ .

$\sigma$	$\epsilon_T^{(T)}$	$\epsilon_p^{(T)}$	$\epsilon_T^{(u)}$	$\epsilon_p^{(u)}$
0.1	1.9540	0.8404	-0.4467	-33.9467
0.2	1.9540	0.8389	-0.4468	-16.3102
0.4	1.9540	0.8381	-0.4468	-7.4489
0.6	1.9540	0.8379	-0.4468	-4.4951
0.8	1.9540	0.8377	-0.4468	-3.0182
1.0	1.9540	0.8376	-0.4467	-2.1320

De acordo com os resultados obtidos, os coeficientes de salto de temperatura  $\epsilon_T^{(T)}$  e  $\epsilon_T^{(u)}$  não dependem do coeficiente de evaporação/condensação. Já os coeficientes de salto de pressão dependem do coeficiente de evaporação e condensação na interface. O coeficiente  $\epsilon_p^{(T)}$  aumenta com a diminuição de  $\sigma$ , mas o desvio máximo da condição de completa evaporação/condensação é menor

que 0,5%. O coeficiente  $\epsilon_p^{(u)}$  é negativo e a sua magnitude aumenta com a diminuição de  $\sigma$ . Entretanto, um desvio em relação à completa evaporação/condensação maior que 100% já é observado quando  $\sigma=0.6$ , ou seja, o coeficiente de salto de pressão devido à força termodinâmica  $X_u$  depende fortemente do coeficiente de evaporação/condensação na interface.

## 5 Considerações Finais

Em regimes de baixa ou moderada rarefação do gás, os coeficientes de salto de temperatura e pressão encontrados no presente trabalho podem ser utilizados nas condições de contorno utilizadas para resolver as equações da mecânica dos meios contínuos em problemas que envolvem fraca evaporação/condensação. De acordo com os resultados encontrados, a influência do coeficiente de evaporação/condensação no salto de temperatura na interface é desprezível, mas no salto de pressão é significativa. A comparação dos resultados obtidos com os dados encontrados na literatura, e obtidos via modelo de Bhatnagar-Gross e Krook, mostrou boa concordância.

## Agradecimentos

As autoras agradecem a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (processo nº 2022/10476-1 FAPESP) pelo apoio financeiro concedido para a realização da pesquisa.

## Referências

- [1] S. Chapman e T. G. Cowling. **The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases**. 3ª ed. Cambridge: University Press, 1970. ISBN: 9780521408448.
- [2] C. Cercignani. **Theory and Application of the Boltzmann Equation**. Edinburgh: Scottish Academic Press, 1975. ISBN: 9780701120818.
- [3] G. A. Bird. **Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows**. Oxford: Oxford University Press, 1994. ISBN: 978019856195.
- [4] J. W. Cipolla Jr., H. Lang e S. K. Loyalka. “Kinetic theory of condensation and evaporation. II”. Em: **J. Chem. Phys.** 61 (1974), pp. 69–77. DOI: 10.1063/1.1681672.
- [5] J. H. Ferziger e H. G. Kaper. **Mathematical Theory of Transport Processes in Gases**. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1972. ISBN: 9780720420463.
- [6] Y. P. Pao. “Temperature and density jumps in the kinetic theory of gases and vapors”. Em: **Phys. Fluids** 14.7 (1971), pp. 1340–1346. DOI: 10.1063/1.1693612.
- [7] V. B. Leite, D. Kalempa e I. Graur. “Kinetic modelling of evaporation and condensation phenomena around a spherical droplet”. Em: **Int. J. Heat Mass Transfer** 166 (2021), p. 120719. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2020.120719.
- [8] P. L. Bhatnagar, E. P. Gross e M. A. Krook. “A model for collision processes in gases”. Em: **Phys. Rev.** 94 (1954), pp. 511–525. DOI: 10.1103/PhysRev.94.511.
- [9] E. M. Shakhov. “Generalization of the Krook kinetic relaxation equation”. Em: **Fluid Dynamics** 3.5 (1968), pp. 95–96. DOI: 10.1007/BF01029546.
- [10] F. Sharipov. **Rarefied Gas Dynamics. Fundamentals for Research and Practice**. Berlin: Wiley-VCH, 2016. ISBN: 9783527413263.