Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Empregando Tecnologias Digitais para Relacionar os Números Metálicos às Medidas das Diagonais de Polígonos Regulares

Olga H. Saito[1] Rudimar L. Nós[2]
UTFPR, Curitiba, PR
Jessica A. Schifler[3]
E.M.E.B. Avencal São Sebastião, Mafra, SC

Resumo. Neste trabalho, apresentamos uma proposta de atividades para relacionar os números metálicos às medidas das diagonais dos polígonos regulares. No planejamento das atividades, aplicadas a uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública na zona rural do município de Mafra, Santa Catarina, utilizamos tecnologias digitais como o GeoGebra e as Planilhas Google. Concluímos que estes aplicativos são excelentes ferramentas para estimular o senso investigativo dos(as) estudantes acerca da relação dos números metálicos com os polígonos regulares, e que as atividades propostas estão em conformidade com o que estabelece a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) sobre o uso de tecnologias digitais no ensino de matemática.

Palavras-chave. BNCC, Ensino de matemática, Média metálica, Planilhas Google, Números irracionais, GeoGebra.

1 Introdução

Segundo Boyer [1], há na história da matemática uma busca incessante pela revelação e compreensão dos mistérios associados aos números, suas características e aplicações em diversos contextos. E existem vários conjuntos numéricos intrigantes e interessantes, como os números pitagóricos, os números primos, os números perfeitos, os números amigos, os números metálicos, ... Quanto aos números metálicos, estes têm presença significativa na teoria dos números e em diversas aplicações matemáticas, como por exemplo, no comprimento das diagonais de polígonos regulares.

Os números constituem uma das cinco unidades temáticas da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [2] para o ensino de matemática.

> A unidade temática Números tem como finalidade desenvolver o pensamento numérico, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades. No processo da construção da noção de número, os alunos precisam desenvolver, entre outras, as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, noções fundamentais da Matemática. Para essa construção, é importante propor, por meio de situações significativas, sucessivas ampliações dos campos numéricos. No estudo desses campos numéricos, devem ser enfatizados registros, usos, significados e operações ([2], p. 268).

[1]ohsaito@gmail.com
[2]rudimarnos@utfpr.edu.br
[3]jessicaaugustin00@gmail.com

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0387

Ainda, a BNCC estabelece como quinta competência específica de matemática para o Ensino Fundamental: "Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados" ([2], p. 267).

Desta forma, propomos neste trabalho atividades [14] para relacionar os números metálicos às medidas das diagonais dos polígonos regulares. As atividades foram aplicadas a uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental e exploram o emprego de tecnologias digitais, como o GeoGebra [5] e as Planilhas Google [6].

2 Os números metálicos

A designer e matemática argentina Vera Martha Winitzky de Spinadel (1929 − 2017) lançou, em 1998, dois livros: *From the Golden Mean to Chaos* e *The Metallic Means and Design*. No primeiro, explorou o número de ouro e, a partir dele, definiu o conjunto dos números metálicos; no segundo, destacou que os números metálicos servem como a base de um sistema de proporções que possibilita o desenho de qualquer coisa.

Spinadel [15, 16] define os elementos que fazem parte da família dos números metálicos, também conhecidos por *média metálica*, como sendo aqueles que são soluções positivas das equações quadráticas do tipo

$$\{x \in \mathbb{R}/x^2 - px - q = 0,\ x > 0,\ p, q \in \mathbb{N}\}. \tag{1}$$

Os números metálicos também podem ser obtidos a partir de frações contínuas, sendo denominados números irracionais quadráticos, ou seja, são solução de uma equação quadrática do tipo (1), e também podem ser gerados a partir de sequências de Fibonacci [8].

Alguns números metálicos foram nomeados com nomes de metais, tais como os números de ouro, de prata, de bronze, de cobre, de níquel e de platina. Na Tabela 1, podemos observar a equação, os coeficientes p e q, a raiz irracional e o valor decimal aproximado de cinco desses seis números metálicos.

Tabela 1: Nomes associados a alguns números metálicos [14].

Nome	Equação	p	q	Raíz irracional	Raíz decimal aproximada
Número de Ouro	$x^2 - x - 1 = 0$	1	1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	1,618003398
Número de Prata	$x^2 - 2x - 1 = 0$	2	1	$1+\sqrt{2}$	2,41421356
Número de Bronze	$x^2 - 3x - 1 = 0$	3	1	$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$	3,30277563
Número de Cobre	$x^2 - x - 2 = 0$	1	2	2	2
Número de Níquel	$x^2 - x - 3 = 0$	1	3	$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$	2,30277563
Número de Platina	$x^2 - 2x - 2 = 0$	2	2	$1+\sqrt{3}$	2,73205080

Os números listados na Tabela 1 são os mais conhecidos da família dos números metálicos, porém o conjunto é infinito, visto que p e q admitem qualquer valor natural. Os demais números metálicos não possuem um nome associado a eles.

3 Diagonais dos polígonos regulares

Alguns estudos mais recentes mostram a relação entre os números metálicos e as diagonais de polígonos regulares [3, 12]. O número de ouro, por exemplo, está associado à medida de uma das diagonais do pentágono regular [10]. Os demais números metálicos também guardam alguma relação com as diagonais de polígonos regulares? Até o momento, não dispomos de um modelo matemático que ofereça uma resposta a essa questão. No entanto, podemos analisar individualmente alguns casos.

Para relacionar os números metálicos às diagonais dos polígonos regulares, utilizamos os Teoremas 3.1 e 3.2 que determinam o número de diagonais de um polígono regular, e os Teoremas 3.3 e 3.4 que estabelecem, respectivamente, a medida do lado e a medida das diagonais dos polígonos regulares [4, 9].

Teorema 3.1. *Todo polígono convexo de n lados possui exatamente $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonais.*

Teorema 3.2. *Um polígono regular de n lados possui $\frac{n-2}{2}$ diagonais com medidas diferentes em cada vértice se n é par, e $\frac{n-3}{2}$ diagonais com medidas diferentes em cada vértice se n é ímpar.*

Teorema 3.3. *Seja um polígono regular de n lados, inscrito em uma circunferência C, de centro O e raio R. A medida ℓ_n dos lados desse polígono é dada por $\ell_n = 2Rsen\left(\frac{\pi}{n}\right)$.*

Teorema 3.4. *Seja um polígono regular de n lados e k diagonais distintas, inscrito em uma circunferência C, de centro O e raio R. A medida $d_{n,k}$ das diagonais desse polígono é dada por*

$$d_{n,k} = 2Rsen\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right), \tag{2}$$

com $n \in \mathbb{N}$ e $k = 1, 2, 3, \ldots, n-3$.

Para efetuar os cálculos relacionando o lado e as diagonais de um polígono regular, Oliveira [12] considerou os lados que partem de um vértice como sendo a primeira e a última diagonais e, com isso, propôs uma adaptação na fórmula (2) de $(k+1)$ para k – Figura 1, onde $\frac{d_{n,k}}{\ell_n}$, com $\ell_n = d_{n,1}$, envolve o cálculo de radicais duplos [10, 11, 13].

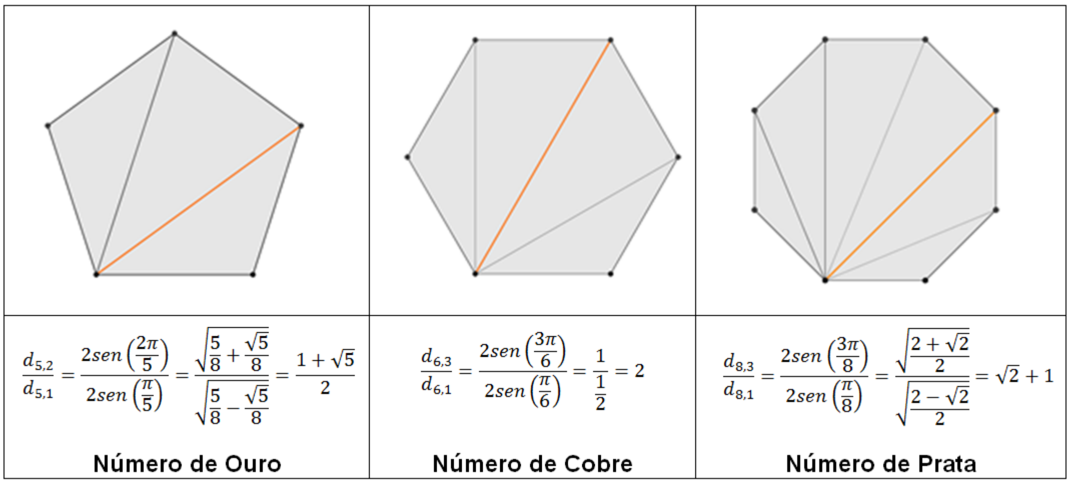


Figura 1: Razão entre a medida da diagonal e a medida do lado, adaptado de [12].

Dando sequência a estas pesquisas, ampliamos a lista de polígonos analisados observando a relação entre os números metálicos e a razão entre as medidas das diagonais e a medida do lado dos polígonos regulares de n lados, ou seja, $\dfrac{d_{n,k}}{l_n} = \dfrac{sen\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right)}{sen\left(\frac{\pi}{n}\right)}$, com $4 \leq n \leq 20$. Na Tabela 2, a coluna A indica o número de lados do polígono regular e as colunas B a J, a razão entre a medida das diagonais distintas e a medida do lado.

Tabela 2: Razão entre a medida da diagonal e o lado do polígono regular [14].

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2					Razão entre a diagonal e o lado						
3		1	2	3	4	5	6	7	8	9	
4	4	1,41421356									
5	5	1,61803399									
6	6	1,73205081	2								
7	7	1,80193774	2,24697960								
8	8	1,84775907	2,41421356	2,61312593							
9	9	1,87938524	2,53208889	2,87938524							
10	10	1,90211303	2,61803399	3,07768354	3,23606798						
11	11	1,91898595	2,68250707	3,22870742	3,51333709						
12	12	1,93185165	2,73205081	3,34606521	3,73205081	3,86370331					
13	13	1,94188363	2,77091205	3,43890513	3,90704154	4,14811491					
14	14	1,94985582	2,80193774	3,51351879	4,04891734	4,38128627	4,49395921				
15	15	1,95629520	2,82709092	3,57432919	4,16535213	4,57432919	4,78338612				
16	16	1,96157056	2,84775907	3,62450979	4,26197263	4,73565025	5,02733949	5,12583090			
17	17	1,96594620	2,86494446	3,66638047	4,34296229	4,87164974	5,23443900	5,41897572			
18	18	1,96961551	2,87938524	3,70166631	4,41147413	4,98724153	5,41147413	5,67128182	5,75877048		
19	19	1,97272261	2,89163448	3,73167011	4,46991550	5,08623325	5,56381182	5,88962410	6,05478279		
20	20	1,97537668	2,90211303	3,75738973	4,52014702	5,17160329	5,69571753	6,07958429	6,31375151	6,39245322	
21											

Tabela 3: Números metálicos $\sigma_{p,q}$, com $1 \leq p \leq 3$ e $1 \leq q \leq 20$ [14].

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
4	p	q	raiz		p	q	raiz		p	q	raiz	
5	1	1	1,61803398874989	**Ouro**	2	1	2,41421356237309	**Prata**	3	1	3,30277563773199	**Bronze**
6	1	2	2	**Cobre**	2	2	2,73205080756888	**Platina**	3	2	3,56155281280883	
7	1	3	2,30277563773199	**Níquel**	2	3	3		3	3	3,79128784747792	
8	1	4	2,56155281280883		2	4	3,23606797749979		3	4	4	
9	1	5	2,79128784747792		2	5	3,44948974278318		3	5	4,19258240356725	
10	1	6	3		2	6	3,64575131106459		3	6	4,37228132326901	
11	1	7	3,19258240356725		2	7	3,82842712474619		3	7	4,54138126514911	
12	1	8	3,37228132326901		2	8	4		3	8	4,70156211871642	
13	1	9	3,54138126514911		2	9	4,16227766016838		3	9	4,85410196624968	
14	1	10	3,70156211871642		2	10	4,31662479035540		3	10	5	
15	1	11	3,85410196624968		2	11	4,46410161513775		3	11	5,14005494464026	
16	1	12	4		2	12	4,60555127546399		3	12	5,27491721763537	
17	1	13	4,14005494464026		2	13	4,74165738677394		3	13	5,40512483795333	
18	1	14	4,27491721763537		2	14	4,87298334620742		3	14	5,53112887414927	
19	1	15	4,40512483795333		2	15	5		3	15	5,65331193145904	
20	1	16	4,53112887414927		2	16	5,12310562561766		3	16	5,77200187265877	
21	1	17	4,65331193145904		2	17	5,24264068711928		3	17	5,88748219369606	
22	1	18	4,77200187265877		2	18	5,35889894354067		3	18	6	
23	1	19	4,88748219369606		2	19	5,47213595499958		3	19	6,10977222864644	
24	1	20	5		2	20	5,58257569495584		3	20	6,21699056602830	
25												

A Tabela 3 relaciona os valores dos números metálicos $\sigma_{p,q}$, com $1 \leq p \leq 3$ e $1 \leq q \leq 20$, a partir da solução positiva

$$\frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics. v. 11, n. 1, 2025.

das equações quadráticas da forma $x^2 - px - q = 0$ [7, 16]. Aproximamos os referidos valores com 14 casas decimais.

Comparando as Tabelas 2 e 3, verificamos a relação da razão entre a medida da diagonal e a medida do lado do pentágono regular, do hexágono regular e do octógono regular com os números de ouro, de cobre e de prata, respectivamente.

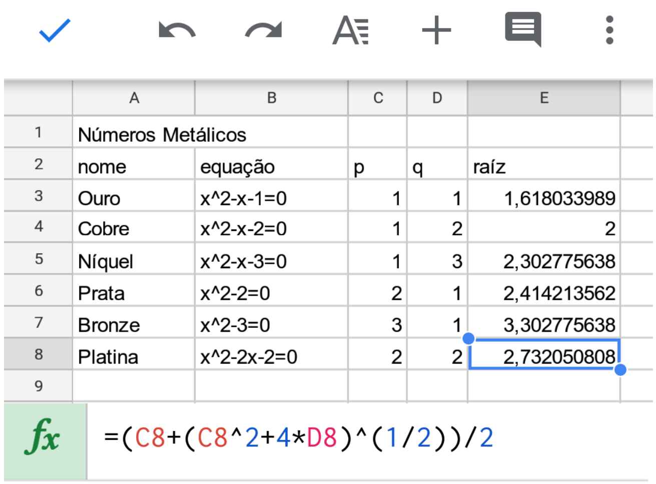
Ainda, constatamos outras duas relações: o comprimento de uma diagonal do decágono regular e o número metálico $1 + \sqrt{5} = 3,23606797...$ ($p = 2$ e $q = 4$); o comprimento de uma diagonal do dodecágono regular e o número de platina $1 + \sqrt{3} = 2,73205080...$ ($p = 2$ e $q = 2$). Por meio da comparação das tabelas e da observação dos valores aproximados nelas apresentados, percebemos que não há relação entre a razão das medidas das diagonais e o lado de outros polígonos regulares com $4 \leq n \leq 20$ e os números metálicos, exceto os citados para $n \in \{5, 6, 8, 10, 12\}$.

4 Atividades com as Planilhas Google e o GeoGebra

Schiefler [14] aplicou em uma turma do 9º do Ensino Fundamental de uma escola pública na zona rural do município de Mafra, Santa Catarina, as atividades que elaboramos integrando o estudo de equações do segundo grau e polígonos regulares com os números metálicos, e empregando o GeoGebra e as Planilhas Google como instrumentos auxiliares.

Para iniciar a atividade, apresentamos a equação $x^2 - x - 1 = 0$, e solicitamos aos(às) estudantes para que calculassem possíveis soluções pelos métodos já estudados, ou seja, usando o conhecimento prévio sobre as soluções da equação do segundo grau pela fórmula de Báskara. Os resultados obtidos foram $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, que na forma decimal representam aproximadamente $1,618$ e $-0,618$. A raiz positiva calculada é o número de ouro. Apresentamos então a definição de números metálicos como sendo as raízes positivas das equações da forma $x^2 - px - q = 0$, com $p, q \in \mathbb{N}$ [15].

Para calcular os valores decimais dos números metálicos, utilizamos os tablets e construímos uma tabela no Planilhas Google. A programação para o cálculo das raízes da equação $x^2 - px - q = 0$ foi baseada nos valores dos coeficientes p e q, como ilustra a Figura 2.



	A	B	C	D	E
1	Números Metálicos				
2	nome	equação	p	q	raíz
3	Ouro	x^2-x-1=0	1	1	1,618033989
4	Cobre	x^2-x-2=0	1	2	2
5	Níquel	x^2-x-3=0	1	3	2,302775638
6	Prata	x^2-2=0	2	1	2,414213562
7	Bronze	x^2-3=0	3	1	3,302775638
8	Platina	x^2-2x-2=0	2	2	2,732050808
9					

fx =(C8+(C8^2+4*D8)^(1/2))/2

Figura 2: Raízes das equações associadas aos números metálicos no Planilhas Google [14].

Dando continuidade, verificamos a relação entre os números metálicos e as diagonais dos polígonos regulares com o uso do GeoGebra. Para iniciar, os eixos foram retirados e a malha quadriculada

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0387

configurada em uma escala de 10000 unidades × 10000 unidades, para aumentar a quantidade de algarismos nas medidas das diagonais – Figura 3.

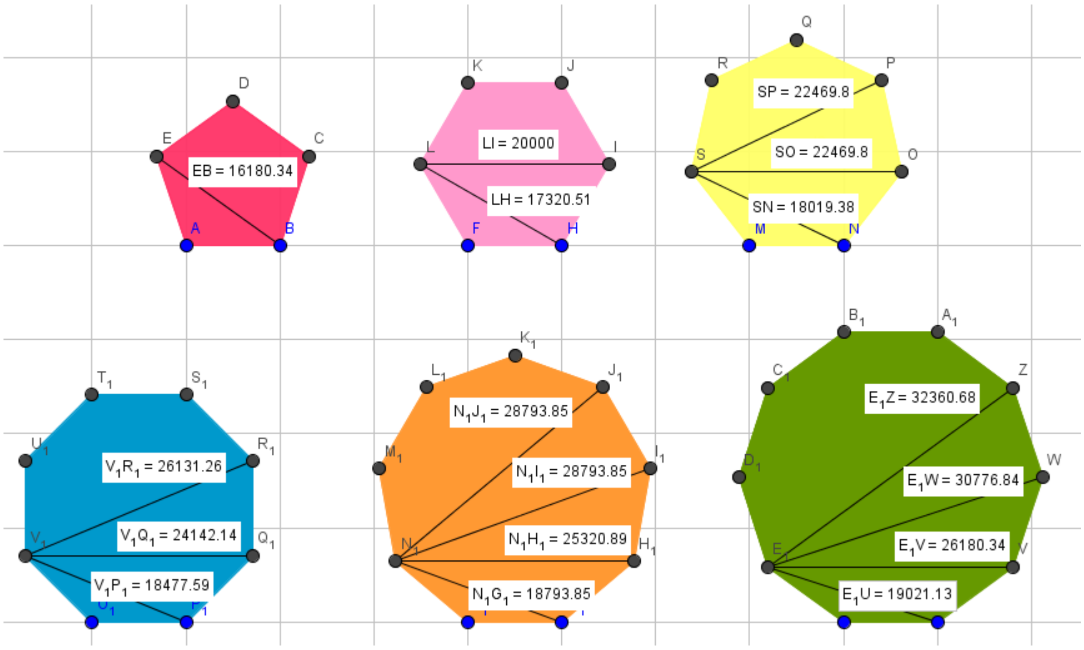


Figura 3: Números metálicos e as diagonais dos polígonos regulares [14].

Comparando as medidas determinadas na planilha e a medida das diagonais calculadas no GeoGebra, constatamos a presença do número de ouro na medida da diagonal do pentágono regular, do número de cobre na medida da diagonal do hexágono regular e do número de prata na medida da diagonal do octógono regular. Também observamos que a medida de outra diagonal do hexágono regular apresenta relação com o número de platina $2,732050...$, porém com uma unidade a menos, ou seja, $1,732050...$.

Os(as) estudantes gostaram das atividades, realizando-as com interesse, sendo que 15 dos(as) 16 integrantes da turma aprovaram o uso dos softwares e nenhum(a) deles(as) conhecia o GeoGebra ou o Planilhas Google. Os(as) estudantes também informaram que gostaram da agilidade na realização dos cálculos, da interação com as tecnologias e a possibilidade de conhecer novas ferramentas. O ponto negativo destacado foi de que, quando realizadas no papel, as atividades permitem melhor compreensão de cada etapa dos cálculos. As dificuldades verificadas tiveram relação com a construção dos polígonos sobre a malha e com as desconfigurações causadas por toques sobre a tela.

5 Considerações Finais

Neste trabalho, exploramos a partir dos números metálicos conteúdos como equações quadráticas, limites de sequências, frações contínuas e razão entre segmentos de reta. Abordamos ainda aplicações dos números metálicos, especialmente os números de ouro e prata, em diversas áreas do conhecimento, destacando sua presença em elementos e sistemas de proporções ao longo da história. Investigamos também a relação entre números metálicos e as medidas das diagonais de polígonos regulares, estabelecendo associações em alguns casos. Nas atividades, o tema mostrou-se versátil para contextualização no Ensino Fundamental através do uso de ferramentas como o GeoGebra e as Planilhas Google. O projeto incentivou a curiosidade, evidenciou a natureza investigativa da matemática e ressaltou o potencial de aplicação dos números metálicos, integrando desta forma geometria e álgebra.

Referências

[1] C. B. Boyer. **História da matemática**. 2a. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996. ISBN: 9788521200239.

[2] Brasil. **BNCC (Base Nacional Comum Curricular)**. Online. Acessado em 17/01/2024, `http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf`.

[3] A. R. Buitrago. "Polygons, diagonals, and the bronze mean". Em: **Nexus Network Journal** 9(2) (2007), pp. 321–326. DOI: `10.1007/s00004-007-0046-x`.

[4] O. Dolce e J. N. Pompeo. **Fundamentos da matemática elementar: geometria plana**. 9a. ed. São Paulo: Atual, 2013. ISBN: 9788535716863.

[5] GeoGebra. **Baixar aplicativos GeoGebra**. Online. Acessado em 23/01/2024, `https://www.geogebra.org/download?lang=pt`.

[6] Google. **Planilhas**. Online. Acessado em 08/03/2024, `https://chromewebstore.google.com/detail/planilhas/felcaaldnbdncclmgdcncolpebgiejap?hl=pt-BR`.

[7] A. V. Huber. "Números metálicos". Dissertação de mestrado. Universidade Federal de Santa Maria, 2019.

[8] C. Minnaard e V. J. Condesse. "La familia de los números metálicos y su hijo pródigo: el número de oro". Em: **Revista Iberoamericana de Educación (versión digital)** 42(2) (2007). Acessado em 20/10/2023, `http://repositorio.unlz.edu.ar:8080/handle/123456789/320?show=full&locale-attribute=pt`, pp. 20–30.

[9] A. C. M. Neto. **Geometria**. 1a. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. ISBN: 9788585818937.

[10] R. L. Nós, O. H. Saito e M. A. dos Santos. "Geometria, radicais duplos e a raiz quadrada de números complexos". Em: **Revista Eletrônica Paulista de Matemática** 11 (2017), pp. 48–64. DOI: `10.21167/cqdvol11201723169664rlnohsmas4864`.

[11] R. L. Nós e V. M. R. da Silva. "Radicais duplos no cálculo do volume de poliedros convexos". Em: **Revista Eletrônica Paulista de Matemática** 16 (2019), pp. 53–70. DOI: `10.21167/cqdvol16201923169664rlnvmrs5370`.

[12] J. dos S. Oliveira. "Um breve estudo sobre os números metálicos". Dissertação de mestrado. Universidade Federal de São João Del Rei, 2019.

[13] O. H. Saito, R. L. Nós e M. A. dos Santos. "Radicais duplos e a raiz quadrada de um número complexo". Em: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**. 2017, pp. 010557-1–7. DOI: `10.5540/03.2017.005.01.0557`.

[14] J. A. Schifler. "A família dos números metálicos no ensino e aprendizagem de conteúdos de matemática na Educação Básica". Dissertação de mestrado. UTFPR, Curitiba, 2020.

[15] V. W. de Spinadel. "La familia de numeros metalicos". Em: **CIMBAGE - Centro de Investigación en Metodologías Borrosas Aplicadas a la Gestión y Economía** 6 (2003), pp. 17–44.

[16] V. W. de Spinadel. **The family of metallic means**. Online. Acessado em 01/02/2024, `https://eudml.org/doc/256730`.

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0387