

Simulação Numérica de uma Equação do tipo Burgers com Fronteira Móvel

Loisi Carla M. Pereira¹

DMAT/UNIRIO, Urca, RJ

Mauro A. Rincon²

UFRJ/PPGI, Rio de Janeiro, RJ

Resumo. Neste trabalho apresentamos a simulação numérica para as soluções aproximadas de uma equação não linear do tipo Burgers com fronteira móvel. O problema aproximado é definido utilizando o método de Crank-Nicolson-Galerkin linearizado, resultando em um sistema de equações algébricas lineares em cada passo de tempo mantendo a ordem de convergência quadrática no tempo. Realizamos simulações numéricas utilizando polinômios de Lagrange de diferentes ordens, como linear, quadrático, cúbico e cúbico de Hermite. Além disso, apresentamos gráficos e analisamos as ordens de convergência em cenários unidimensionais e bidimensionais. Assim, nossos resultados evidenciam a consistência entre as abordagens teóricas e numéricas, proporcionando uma compreensão abrangente do problema em estudo.

Palavras-chave. Equação do tipo Burgers, Análise Numérica, Elementos Finitos, Domínio não cilíndrico, Simulação Numérica, Método de Crank-Nicolson-Galerkin linearizado.

1 Introdução

Neste trabalho realizamos a simulação numérica de um problema não linear de uma equação do tipo Burgers em um domínio não cilíndrico. O modelo em estudo é dado por

$$\begin{cases} u_t(x, t) - \Delta u(x, t) + \nabla \cdot \phi(u(x, t)) = f(x, t) & \text{em } \widehat{Q} \\ u(x, t) = 0 & \text{em } \widehat{\Sigma}, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \Omega_0 \end{cases} \quad (1)$$

onde $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$, é uma função vetorial, tal que $\phi_i(s) = \frac{s^2}{2} + s$, $\forall i = 1, \dots, d$. Para cada $t \in [0, T]$, $\Omega_t = \{x \in \mathbb{R}^d; x = k(t)y, y \in \Omega\}$ é a deformação de Ω no tempo t , \widehat{Q} representa o domínio não cilíndrico de \mathbb{R}^{d+1} , definido por $\widehat{Q} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^d \times (0, T); x \in \Omega_t\} = \bigcup_{0 < t < T} \{\Omega_t \times \{t\}\}$,

cujas fronteiras lateral $\widehat{\Sigma}$ é definida por $\widehat{\Sigma} = \bigcup_{0 < t < T} \{\Gamma_t \times \{t\}\}$, com Γ_t sendo a fronteira de Ω_t .

O artigo [3] aborda a existência e unicidade de uma solução particular da equação (1), considerando a equação homogênea e o caso unidimensional. O estudo também apresenta os aspectos numéricos do problema, onde o método dos elementos finitos é utilizado na variável espacial e diferenças finitas na variável temporal. No entanto, é importante observar que o método numérico empregado apresenta uma taxa de convergência de primeira ordem no tempo. Ambos os artigos,

¹loisi@uniriotec.br

²rincon@dcc.ufrj.br

[1] e [2], contribuem para a compreensão e análise da equação de Burgers em diferentes contextos, fornecendo resultados importantes sobre a existência e unicidade de soluções em domínios que podem ser transformados em retângulos e domínios não regulares, respectivamente, no caso unidimensional.

A demonstração do Teorema (1.1) pode ser encontrada em [4]. Essa demonstração é feita por meio de uma mudança de variável que transforma o problema em estudo em um problema equivalente definido em domínio cilíndrico, cujas seções não dependem do tempo t . Isto nos permite usar resultados de compacidade e o método de Faedo-Galerkin. Após a mudança de variável, o problema transformado é definido no cilindro $Q = \Omega \times [0, T]$ com fronteira $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$ e pode ser expresso como,

$$\begin{cases} v_t(y, t) - \frac{k'(t)}{k(t)} \nabla v(y, t) \cdot y - \frac{1}{(k(t))^2} \Delta v(y, t) + \frac{1}{k(t)} \nabla \cdot \phi(v(y, t)) = g(y, t) & \text{em } Q, \\ v(y, t) = 0 & \text{em } \Sigma, \\ v(y, 0) = v_0(y) & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (2)$$

onde $g(y, t) = f(k(t)y, t)$.

A equivalência entre os problemas (1) e (2) assegura a existência e unicidade de solução para o problema (1) definido no domínio não cilíndrico. Para obter tais resultados é necessário assumir as seguintes hipóteses:

(H1) A fronteira Γ de Ω é de classe C^2 ;

(H2) $k = k(t)$ é uma função real de classe C^2 , com $0 < k_0 \leq k(t) \leq k_1$.

Theorem 1.1. *Sob as hipóteses (H1) e (H2), considerando o dado inicial $u_0 \in H_0^1(\Omega_0) \cap H^2(\Omega_0)$, $f \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega_t))$, existe uma única solução forte $u : \widehat{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ do problema (1) satisfazendo as condições:*

1. $u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_t) \cap H^2(\Omega_t))$;
2. $u' \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega_t))$;
3. $u'(x, t) - \Delta u(x, t) + \nabla \cdot \phi(u(x, t)) = f(x, t) \quad q.s \text{ em } \widehat{Q}$.
4. $u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{em } \Omega_0$.

2 Simulação Numérica

O objetivo desta seção é aplicar um método numérico para obter soluções aproximadas do modelo em estudo (1) nos casos: unidimensional e bidimensional. Para isto, aplicamos o Método de Crank-Nicolson Galerkin linearizado, que consiste em utilizar o método de elementos finitos no espaço e diferenças finitas no tempo. Mais especificamente, usamos uma variação de Crank-Nicolson no tempo, como sugerido em [5], no qual é conhecido como Crank-Nicolson-Galerkin linearizado. A vantagem desse esquema é que, para cada passo de tempo, encontrar a solução aproximada está em resolver um sistema algébrico linear. Além disso, tal linearização não afeta a ordem de convergência ao longo do tempo, ou seja, continua sendo de ordem quadrática.

Considere a existência de uma família de subespaços de dimensão finita $\{S_h^r(\Omega)\}_{0 < h < 1}$ em $H_0^1(\Omega)$ possuindo a seguinte propriedade: dado um inteiro $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$ e h , se $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^s(\Omega)$, para algum $1 \leq s \leq r$, então

$$\inf_{\mathcal{X} \in S_h^r(\Omega)} \|v - \mathcal{X}\| + h \|\nabla(v - \mathcal{X})\| \leq ch^s \|v\|_s, \quad (3)$$

onde c é uma constante independente de h e v , $\|\cdot\|_s$ é a norma de $H^s(\Omega)$, e r está relacionado ao grau do polinômio das funções base de $S_h^r(\Omega)$. O número r é a ordem de precisão da família $S_h^r(\Omega)$. No caso de funções lineares por partes, temos que $r = 2$. No caso $r > 2$, $S_h^r(\Omega)$ consiste em polinômios de grau no máximo $r - 1$ em uma triangularização, para maiores detalhes, veja [5].

Com relação a discretização temporal, seja $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T, \forall N \in \mathbb{N}$, uma partição uniforme de $[0, T]$, com τ o comprimento de cada intervalo de tempo, N a parte inteira de T/τ e $t_{n-\frac{1}{2}} = (t_n + t_{n-1})/2$ o ponto médio do n -ésimo intervalo. Seja r uma função qualquer definida sob essa discretização, com $r^n = r(t_n)$, usamos a seguinte notação:

$$\partial_\tau r^n = \frac{r^n - r^{n-1}}{\tau}, \hat{r}^n = \frac{r^n + r^{n-1}}{2}, \bar{r}^n = \frac{3r^{n-1} - r^{n-2}}{2}, \partial_\tau r^{1,0} = \frac{r^{1,0} - r^0}{\tau}, \hat{r}^{1,0} = \frac{r^{1,0} + r^0}{2}.$$

O termo $r^{1,0}$ é um valor previsto para r^1 . Seu uso será discutido mais adiante. Para cada $n \in \{2, \dots, N\}$, o problema totalmente discreto consiste em determinar V^n em $S_h^r(\Omega)$, tal que

$$\begin{aligned} (\partial_\tau V^n, \mathcal{X}) + \alpha(t_{n-\frac{1}{2}})(y \cdot \nabla \hat{V}^n, \mathcal{X}) + \beta(t_{n-\frac{1}{2}})(\nabla \hat{V}^n, \nabla \mathcal{X}) \\ + \gamma(t_{n-\frac{1}{2}})(\nabla \cdot \phi(\bar{V}^n), \mathcal{X}) = (g^{n-\frac{1}{2}}, \mathcal{X}) \quad \forall \mathcal{X} \in S_h^r(\Omega), \end{aligned} \quad (4)$$

O grande destaque desse novo esquema é que ele recai em um sistema algébrico linear, isto sem perder a ordem de convergência quadrática no tempo. Para $n = 1$ será utilizado o método Predictor-Corretor de passo único, onde faremos o uso de uma aproximação linear, para gerar uma solução aproximada preditora para $v(t_1)$, o qual chamaremos de $V^{1,0}$, tal que

$$\begin{aligned} (\partial_\tau V^{1,0}, \mathcal{X}) + \alpha(t_{\frac{1}{2}})(y \cdot \nabla \hat{V}^{1,0}, \mathcal{X}) + \beta(t_{\frac{1}{2}})(\nabla \hat{V}^{1,0}, \nabla \mathcal{X}) \\ + \gamma(t_{\frac{1}{2}})(\nabla \cdot \phi(V^0), \mathcal{X}) = (g^{\frac{1}{2}}, \mathcal{X}) \quad \forall \mathcal{X} \in S_h^r(\Omega). \end{aligned} \quad (5)$$

Com esta aproximação obtida, consideramos a aproximação $\hat{V}^{1,0}$ no termo não linear, obtemos a solução preditora V^1 satisfazendo:

$$\begin{aligned} (\partial_\tau V^1, \mathcal{X}) + \alpha(t_{\frac{1}{2}})(y \cdot \nabla \hat{V}^1, \mathcal{X}) + \beta(t_{\frac{1}{2}})(\nabla \hat{V}^1, \nabla \mathcal{X}) \\ + \gamma(t_{\frac{1}{2}})(\nabla \cdot \phi(\hat{V}^{1,0}), \mathcal{X}) = (g^{\frac{1}{2}}, \mathcal{X}) \quad \forall \mathcal{X} \in S_h^r(\Omega), \end{aligned} \quad (6)$$

A existência e unicidade de $\{V^n\}_{n=1}^N$ satisfazendo (4), (5) e (6) segue do fato deste ser equivalente a um sistema do tipo $Ay = b$, com A invertível.

2.1 Algoritmo do Método de Crank-Nicolson- Galerkin Linearizado

Seja $\{\psi_i\}_{i=1}^m$ uma base de $S_h^r(\Omega)$. De fato, como V^n pertence ao espaço $S_h^r(\Omega)$ temos que V^n pode ser escrito como combinação linear da base, ou seja,

$$V^n = \sum_{j=1}^m c_j^n \psi_j \quad (7)$$

Portanto, substituindo (7) em (4) e considerando $\mathcal{X} = \psi_i$, para $i = 1, \dots, m$, obtemos um sistema algébrico linear

$$M \partial_\tau c^n + K(t_{n-1/2}) \hat{c}^n + F(\bar{c}^n) = G(t_{n-1/2}) \quad (8)$$

onde as matrizes e os vetores são definidos por,

$$M_{i,j} = (\psi_j, \psi_i), \quad K_{i,j}(t_{n-1/2}) = \beta(t_{n-1/2})(\nabla \psi_j, \nabla \psi_i) + \alpha(t_{n-1/2})(y \cdot \nabla \psi_j, \psi_i),$$

$$F_i(\bar{c}^n) = \gamma(t_{n-1/2}) \left(\phi \left(\sum_{k=1}^m \bar{c}_k^n \psi_k \right), \nabla \psi_i \right), \quad G_i(t_{n-1/2}) = (g(t_{n-1/2}), \psi_i)$$

$$A_{i,j} = (\nabla \psi_i, \nabla \psi_j), \quad b_i(v_0) = (\nabla v_0, \nabla \psi_i) \quad c^n = (c_1^n, c_2^n, \dots, c_m^n)^t$$

para $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Obtemos abaixo, o seguinte algoritmo para calcular soluções aproximadas para o nosso modelo em estudo,

$$\begin{aligned} Ac^0 &= b(v_0) \\ (M + K(t_{1/2})\frac{\tau}{2})c^{1,0} &= (M - \frac{\tau}{2}K(t_{1/2}))c^0 - \tau F(c^0) + \tau G(t_{1/2}) \\ (M + K(t_{1/2})\frac{\tau}{2})c^1 &= (M - \frac{\tau}{2}K(t_{1/2}))c^0 - \tau F(\frac{c^{1,0} + c^0}{2}) + \tau G(t_{1/2}) \\ (M + K(t_{n-1/2})\frac{\tau}{2})c^n &= (M - \frac{\tau}{2}K(t_{n-1/2}))c^{n-1} - \tau F(\bar{c}^n) + \tau G(t_{n-1/2}). \end{aligned}$$

3 Resultados Numéricos

Apresentamos nesta seção dois exemplos da solução aproximada do problema (2), um para o caso unidimensional e outro para o caso bidimensional usando como base do subespaço $S_h^r(\Omega)$, os polinômios de Lagrange linear, quadrático, cúbico e de Hermite cúbico. Para ambos os exemplos, dois tipos de funções $k(t)$, que define a fronteira, estão sendo considerados para analisar o comportamento da solução da equação (4)-(6). Em todas as simulações numéricas consideramos o espaço $\Omega = [-1, 1]$ para o caso unidimensional e o espaço $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$ para o caso bidimensional, e o tempo final, $T = 1$. Em todas as simulações considere as seguintes opções para $k(t)$:

$$\text{(a)} \quad k(t) = \frac{1 + 3t}{2 + 3t}, \quad \text{(b)} \quad k(t) = \frac{3 - \cos(4\pi t)}{6} \quad \forall t \geq 0.$$

Tendo em vista que a solução exata do modelo (2) não é conhecida, para validar a implementação, simulamos um problema com uma solução exata conhecida de (2) que nos permitirá calcular o erro e a ordem de convergência do erro no tempo e no espaço, quando a malha for refinada em h e τ . Com base no teorema de estimativa de erro demonstrado no trabalho [4], temos que a ordem de convergência é $\mathcal{O}(\tau^2)$ no tempo e $\mathcal{O}(h^r)$ no espaço, onde

$$E(h, \tau) = \max_{0 \leq n \leq N} \{ \|V^n - v(t_n)\| \} \leq c(h^r + \tau^2), \tag{9}$$

com c constante independente de h e τ . Todas as taxas de convergência que mostraremos estão de acordo com (9).

3.1 Exemplo1: Unidimensional

Consideramos como solução exata a função $v(y, t) = e^t \text{sen}(\pi y)$. Para analisar a taxa de convergência, o modelo em questão foi simulado com diferentes combinações. Podemos analisar o erro $E(h, \tau) = E(h, h^{(p+1)/2})$ como função de h , como função de m e como função do *runtime*, onde h é o comprimento de cada elemento da partição de Ω , m é a dimensão de $S_h^r(\Omega)$ e *runtime* é o tempo gasto de execução para cada simulação. À medida que refinamos h e τ é natural esperarmos que, em algum momento, ocorra uma divergência devido ao acúmulo de erros de arredondamento no cálculo do erro E . As discretizações utilizadas para o caso unidimensional são:

$$\begin{aligned} h \in \{2^{-2}, 2^{-3}, \dots, 2^{-16}\}, \tau = h \quad & \text{e } p = 1: \text{Lagrange;} \\ h \in \{2^{-2}, 2^{-3}, \dots, 2^{-12}\}, \tau = h^{\frac{3}{2}} \quad & \text{e } p = 2: \text{Lagrange;} \\ h \in \{2^{-2}, 2^{-3}, \dots, 2^{-9}\}, \tau = h^2 \quad & \text{e } p = 3: \text{Lagrange;} \\ h \in \{2^{-2}, 2^{-3}, \dots, 2^{-10}\}, \tau = h^2 \quad & \text{e } p = 3: \text{Hermite;} \end{aligned} \tag{10}$$

onde p é o grau do polinômio das funções da base de $S_h^r(\Omega)$. A escolha de τ como função de h , dado por $\tau = h^{r/2}$, é essencial para observar a taxa de convergência no tempo e no espaço. Os triângulos da Figura 1 nos permite concluir que estas curvas de erro estão de acordo com as estimativas demonstradas em [4]. Ressalta-se que, devido aos valores serem muito pequenos, optamos por utilizar a escala logarítmica na Figura 1.

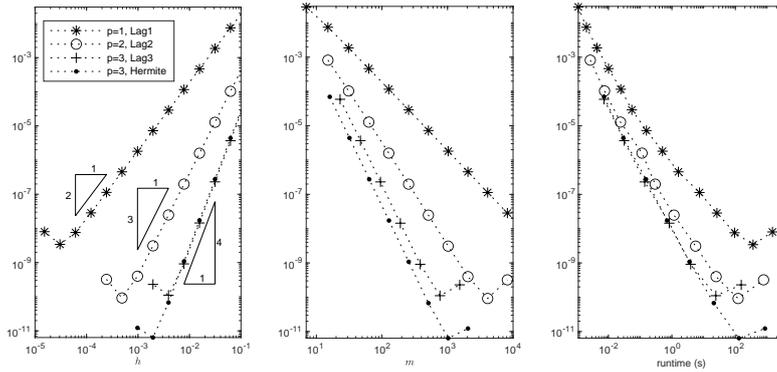


Figura 1: Exemplo 1 - Problema não-homogêneo 1D, fronteira (a). Erro $E(h, \tau)$. Fonte: dos autores.

Uma vez validada a implementação, voltamos a nossa atenção para o modelo em estudo considerando alguma função g . Em nossa simulação, consideramos $g = 0$ em (2). Do lado direito da Figura 2 e da Figura 3, temos as soluções aproximadas U^n , para $n = 0, 1, \dots, N$, para o exemplo 1 usando base cúbica de Lagrange no domínio não cilíndrico. Em ambos os casos são considerados, $h = 2^{-3}$ e $\tau = 2^{-6}$.

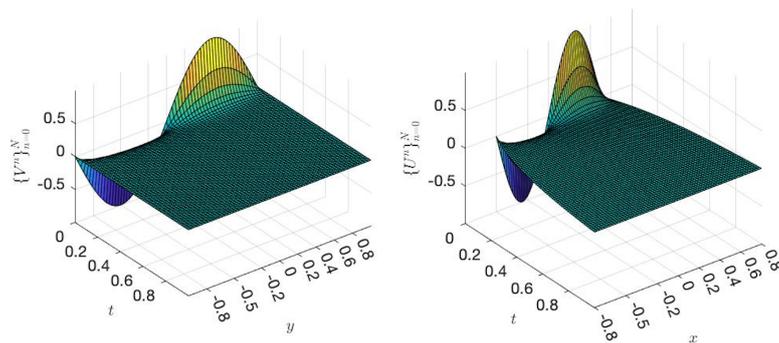


Figura 2: Solução numérica com base cúbica de Lagrange. $\{V^n\}_{n=0}^N$ do exemplo 1 com fronteira (a) está no lado esquerdo no domínio cilíndrico e $\{U^n\}_{n=0}^N$ do lado direito no domínio não cilíndrico considerando $g = 0$. Fonte: dos autores.

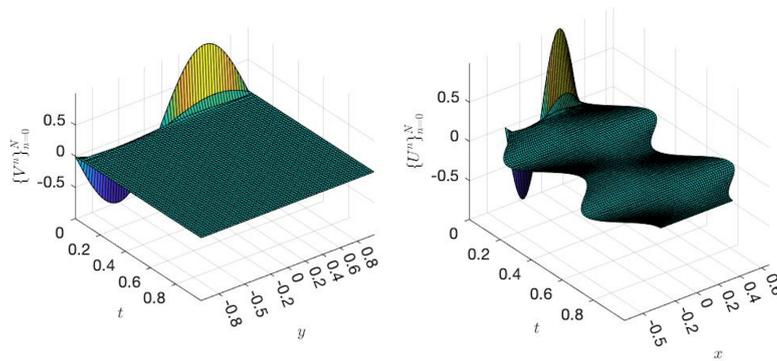


Figura 3: Solução numérica com base cúbica de Lagrange. $\{V^n\}_{n=0}^N$ do exemplo 1 com fronteira (b) está no lado esquerdo no domínio cilíndrico e $\{U^n\}_{n=0}^N$ do lado direito no domínio não cilíndrico considerando $g = 0$. Fonte: dos autores.

No caso bidimensional, consideramos como solução exata $v(y_1, y_2, t) = e^t \text{sen}(\pi y_1) \text{sen}(\pi y_2)$. Similarmente ao caso unidimensional a Figura 4 mostra o erro $E(h, \tau)$ para as quatro bases implementadas considerando a fronteira (b). Porém, para o caso bidimensional, devido ao alto custo computacional, nenhum refinamento foi feito até que o erro divergisse. Para o domínio $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$ escolhido, consideramos $h = \sqrt{(2/Ny_1)^2 + (2/Ny_2)^2}$, onde Ny_1 e Ny_2 são os números dos elementos dos eixos y_1 e y_2 respectivamente, tal que $Ny_1 = Ny_2 \in \{2^3, 2^4, \dots\}$. Como no caso unidimensional, a Figura 4 exibe o erro em função de h , em função de m e de *runtime*. Devido à semelhança do erro utilizando os dois tipos de funções $k(t)$, que definem a fronteira, inserimos a imagem do erro considerando a função $k(t)$ do tipo (b).

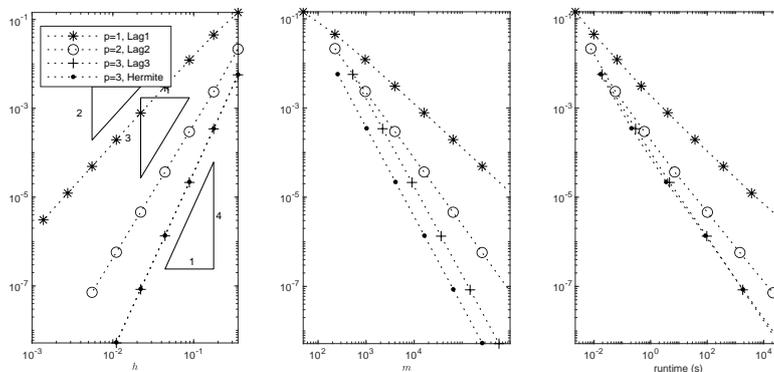


Figura 4: Taxa de convergência, dimensão do espaço aproximado e tempo de execução do exemplo 2, fronteira (b). Fonte: dos autores.

Assim como no caso unidimensional, uma vez validada a implementação, voltamos a nossa atenção para o modelo em estudo considerando alguma função g . Porém, em nossa simulação, consideramos $g = 0$ em (2). Na Figura 5 temos as soluções aproximadas U^n , para $n = 0, 4, 8$, para o exemplo 2 usando a base de Lagrange Cúbico com a condição (a) em domínio não cilíndrico. A Figura 5 foi gerada com $h = 2^{-3/2}$ e $\tau = 2^{-3}$.

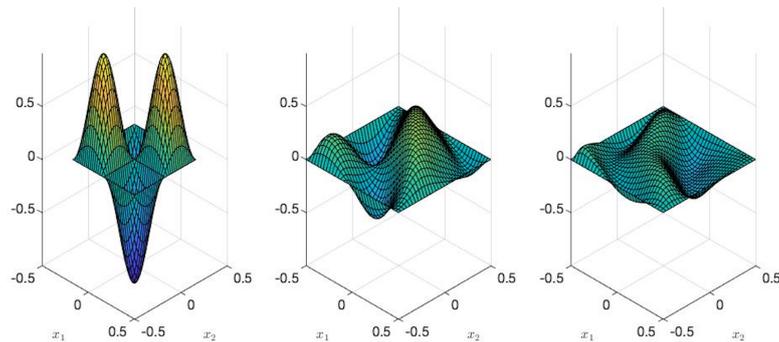


Figura 5: Solução numérica do exemplo 2, com base cúbica de Lagrange e fronteira (a). Na sequência das figuras da esquerda para a direita, $U(x_1, x_2, t_0)$, $U(x_1, x_2, t_4)$ e $U(x_1, x_2, t_8)$. Fonte: dos autores.

4 Considerações Finais

É interessante constatar que visualmente a taxa de convergência foi mantida na ordem ótima para cada base escolhida, mesmo nos casos mais refinados. Além disso, os resultados demonstraram que o problema não foi significativamente afetado pela escolha da fronteira.

Do ponto de vista do tempo computacional, comprovamos numericamente que o método de Crank-Nicolson-Galerkin linearizado, que possui uma ordem de convergência quadrática, apresenta uma vantagem significativa em relação ao método de Newton. Essa vantagem se deve ao fato de que o método de Crank-Nicolson-Galerkin linearizado evita o cálculo da matriz jacobiana a cada intervalo de tempo. Sendo assim, ao evitar esse cálculo repetitivo da matriz jacobiana, o método de Crank-Nicolson-Galerkin linearizado consegue reduzir o tempo de execução, economizando recursos computacionais e acelerando o processo de simulação, tornando-o uma opção mais eficiente em termos de tempo de execução em comparação com o método de Newton.

Referências

- [1] Y. Benia e B.-K. Sadallah. “Existence of solutions to Burgers equations in a non-parabolic domain”. Em: **Electronic Journal of Differential Equations** 20 (2018), pp. 1–13.
- [2] Y. Benia e B.-K. Sadallah. “Existence of solutions to Burgers equations in domains that can be transformed into rectangles”. Em: **Electronic Journal of Differential Equations** 157 (2016), pp. 1–13.
- [3] H. R. Clark, M. A. Rincon e A. Silva. “Analysis and Numerical Simulation of Viscous Burgers Equation”. Em: **Numerical Functional Analysis and Optimization** 7 (2011), pp. 695–716.
- [4] L. C. M. Pereira. “Análise Numérica de uma equação de Burgers não linear com fronteira móvel”. Tese de doutorado. UFRJ/PPGI, 2023.
- [5] V. Thomée. **Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems**. 2a. ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006. ISBN: 9783540331216.