Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

# Função de Lambert-Tsallis: Definição, Propriedades e Aplicações

Carlos G. B. de Freitas[1] e Kleber Z. Nóbrega[2]
Depto. Engenharia de Teleinformática da UFC, Campus do Pici, Fortaleza, CE

**Resumo**. Neste artigo visamos apresentar à comunidade científica uma versão modificada da função de Lambert, que busca ser mais abrangente e oferece soluções analíticas para certos problemas (em especial equações trinomiais). Além disso, também listaremos algumas de suas propriedades e demonstraremos como obter soluções de equações trinomiais arbitrárias a partir da função de Lambert-Tsallis. Aspectos numéricos para a obtenção e cálculo da função também serão tratados e, por fim, também serão mostradas algumas de suas aplicações.

**Palavras-chave**. Trinômios, Exponencial de Tsallis, Função de Lambert-Tsallis, Funções especiais.

## 1 Introdução

O estudo de raízes de trinômios remonta a quase 300 anos, começando com o trabalho de Lambert [1] e seguido pelos de Euler [2]. Desde então, vários trabalhos desenvolvidos se aprofundaram nessa área ao longo dos últimos séculos, nos entregando como resultado os Polinômios de Bell e a função Fox-Wright, por exemplo. No geral, o estudo de equações polinomiais é empreendido por uma vasta teoria e propriedades, que inclui teoremas como o Teorema da Localização dos Zeros de Cauchy, a regra dos sinais de Descartes, o Teorema de Pellet, Teorema de Enestrom-Kakeya, Teorema de Rouche e alguns outros.

Essas teorias constituem o ideário que propicia importantes discussões acerca de temas como o número de raízes complexas e reais, localização dessas raízes no plano complexo, estabilidade de sistemas, zona de convergência e assim por diante. No entanto, quando se trata de fórmulas analíticas para cálculo de raízes polinomiais estas são limitadas a casos específicos. No caso de trinômios, em específico, algumas abordagens foram introduzidas para se obter as fórmulas das raízes em [3–5]; no entanto, estas exigem o uso de ferramentas complexas como polinômios de Bell, funções hipergeométricas, formas explícitas usando expansão de séries de potências e requisitos para ter uma solução convergente, o que nem sempre são convenientes e dificulta o uso em engenharia.

Este trabalho tem como um de seus objetivos apresentar à comunidade matemática a função especial de Lambert-Tsallis, $W_q(z)$, que é capaz de descrever analiticamente as raízes de equações trinomiais, sem importar a ordem da equação e a natureza inteira ou não dos expoentes. A abordagem de problemas usando essa função se torna mais simples por não requerer aproximações, nem impor condições para garantir convergência, ou utilizar outras funções especiais, expansão em séries de potências, análise da derivada, etc., o que acaba por simplificar em muito a análise e aplicações em campos diversos da Matemática, Física e engenharias [6, 7].

A organização desse trabalho dar-se-á com uma seção de apresentação da função de Lambert-Tsallis, ressaltando a motivação de sua definição além de importantes propriedades da mesma e, por fim, destaca-se a metodologia de descrição de um problema genérico e sua solução analítica

[1]iewmonade@alu.ufc.br
[2]kznobrega@ufc.br

 

usando a referida função. Na seção 3 são ressaltados aspectos numéricos de obtenção dos valores para essa função especial, destacando sua característica multivalorada e o respectivo número de soluções associadas aos únicos dois parâmetros da função. Em uma última seção são reapresentadas resultados de estudos obtidos anteriormente, que utilizaram outros tipos de ferramentas matemáticas, comparando-os com a abordagem analítica propiciada pela função de Lambert-Tsallis. Por fim, nas conclusões destacaremos as principais vantagens em se usar abordagem aqui proposta através da função $W_q(z)$.

# 2 Função de Lambert-Tsallis, $W_r(z)$

A função $W$ de Lambert, como hoje é conhecida, foi primeiro introduzida pelo software Maple como `ProductLog()`, tendo sua nomenclatura atual sugerida por um artigo que documentou e explorou vários de seus aspectos, popularizando-a [8]. Muito da teoria básica da função foi primeiro estudada e desenvolvida por Lambert em 1758, em um estudo que almejava solucionar uma equação trinomial por desenvolvimento em séries. Euler reformulou os problemas de Lambert em 1779, chegando em outros desenvolvimentos e conclusões. No geral, a função $W$ de Lambert é usada em diversos campos de estudo, incluindo Física, Estatística, Matemática, Biologia, engenharias e outros. Por definição, a Função de Lambert, $W(z)$, é definida como todas as soluções da equação algébrica

$$w \cdot e^w = z, \tag{1}$$

onde $z$ é o argumento da função, e $w$ corresponde a todos os valores de $W(z)$. A função de Lambert-Tsallis surgiu como uma alteração na definição da função de Lambert, alterando o termo exponencial na equação (1) pela exponencial de Tsallis, proposta em 1994 [9]. Tal função é bem conhecida dos físicos, matemáticos e engenheiros, possuindo o parâmetro de incerteza, $q$, e é definida como

$$e_q^z = [1 + (1-q)z]^{\frac{1}{1-q}}, \forall z. \tag{2}$$

## 2.1 Definição

As equações (1) e (2) serviram de inspiração para o trabalho de Ramos [10], motivado por aplicações em sua área de estudo envolvendo o parâmetro de incerteza, $q$. A proposta, então, foi a equação

$$w_q \cdot \Big[1 + (1-q) \cdot w_q\Big]^{\frac{1}{1-q}} = w_q \cdot e_q^{w_q} = z, \tag{3}$$

onde representam-se os valores da função de Lambert-Tsallis [3] por $w_q$, sendo $z$ o argumento da mesma. Observa-se que a equação (3) é descrita em termos do parâmetro de incerteza, $q$, utilizado historicamente na literatura associado à definição original de Tsallis, cujos valores são reportados também à aplicações específicas.

Contudo, ao introduzir a modificação $r = \frac{1}{1-q}$, sob o ponto de vista puramente matemático, a reescrita da equação (3) elucida o manuseio algébrico em torno da exponencial de Tsallis (e sua aplicação na função de Lambert); garante clareza nas propriedades polinomiais da referida equação quanto ao número de valores assumidos para a função de Lambert-Tsallis; e, por fim, possibilita um maior entendimento das propriedades matemáticas da função, o que facilita a divulgação e vislumbre em potenciais aplicações da função. Por essas razões, tal equação será reescrita como

$$w_r \cdot \left(1 + \frac{w_r}{r}\right)^r = w_r \cdot e_r^{w_r} = z, \tag{4}$$

[3]Também designada por $W_r(z)$, mais adiante.

 

onde a parametrização do problema será feita por $r$ ao invés de $q$. Em outras palavras, reescreve-se a proposta inicial de Rubens utilizando $r$ como parâmetro da Função de Lambert-Tsallis, i.e., daqui em diante denominada e referenciada como $W_r(z)$.

## 2.2 Propriedades

Inúmeras propriedades já foram descobertas e discutidas em apontamentos internos do grupo de pesquisa, mas estão aqui listadas algumas das mais relevantes, em especial quando $r \in \mathbb{Z}^*$.

Tabela 1: Lista de propriedades relacionadas à função de Lambert Tsallis.

<table>
<tr><th colspan="3">Propriedades Algébricas</th></tr>
<tr><td>$\frac{z}{W_r(z)} = e_r^{W_r(z)}$</td><td>$e_{-1}^{-\frac{W_r(z)}{r}} = \frac{1}{1+\frac{W_r(z)}{r}}$</td><td>$\frac{W_r(z)}{z} = \frac{1}{\left[1+\frac{W_r(z)}{r}\right]^r}$</td></tr>
<tr><td>$e_{\alpha r}^{\alpha z} e_{\beta r}^{\beta z} = e_{(\alpha+\beta)r}^{(\alpha+\beta)z}$<br>$[e_r^z]^\alpha = e_{\alpha r}^{\alpha z}$</td><td>$\frac{W_r(z)}{z} = 1$ quando<br>$z = -2r$ e $r$ for um<br>número par positivo</td><td>$\frac{W_r(z)}{z} = -1$ quando<br>$z = 2r$ e $r$ for um<br>número ímpar positivo</td></tr>
<tr><td colspan="3">Para $\Lambda = -\frac{r}{r+1}$, tem-se $\frac{W_r(r)}{r} = \frac{\Lambda}{W_\Lambda(\Lambda)}$<br>Para $\lambda = -\left(\frac{r}{r+1}\right)^{r+1}$, tem-se $\left[\frac{W_r(\lambda)}{\lambda}\right]^{1/r} = \frac{r+1}{r}$</td></tr>
<tr><th colspan="3">Para $r \in Z_+^*$</th></tr>
<tr><td>$W_r(z)$ possui<br>$r+1$ valores</td><td>$W_r(0) = \{0, -r\}$ e o último<br>tem multiplicidade $r$</td><td>Quando $r >> 1$ e $z \in \mathbb{R}$, o<br>comportamento geral de $W_r(z)$<br>será centrado em $(-r, 0)$ e seus<br>valores entornam a região definida<br>por $W_r(z)/r \approx (|z|^{1/r} - 1)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Para $z \in \mathbb{R}$, $W_r(z)$ terá no máximo 3 valores reais<br>que dependerão da paridade de $r$ e do sinal de $z$</td></tr>
<tr><th colspan="3">Para $r \in Z_-^*$</th></tr>
<tr><td>$W_r(z)$ possui $r$ valores</td><td>$W_r(0) = 0$</td><td>$\lim_{z\to\infty} W_r(z) \approx -r$</td></tr>
</table>

Em linhas gerais as propriedades apresentadas são importantes no manuseio dos problemas matemáticos para a eventual definição do mesmo em termos da função de Lambert-Tsallis. Ao contrário da função de Lambert que possui apenas dois ramos reais, a função $W_r(z)$ pode possuir até três ramos reais a depender de $r$ e $z$. De fato, tais raízes têm sido perfeitamente descritas em aplicações [6, 7] onde utilizou-se a função $W_r(z)$ para representar analiticamente determinada variável cuja natureza do problema impõe condições quanto a necessidade da mesma assumir valores reais, positivos e os sistemas associados serem estáveis.

As relações limitantes entre as interfaces dos três ramos reais é uma outra potencialidade do uso da função, uma vez que estas são bem estabelecidas e descritas analiticamente em termos de $r$ e $z$ sendo, portanto, outro grande diferencial ao se usar a função $W_r(z)$. Isso acontece porque o pesquisador conseguirá avaliar analiticamente relações entre variáveis físicas ou situações limitantes sobre determinadas condições de existência ou limítrofes do problema em estudo. Na prática, isso significa ser capaz de associar situações críticas que não conseguem ser tratadas numericamente ao se resolver tais problemas, uma vez que a mudança de parâmetros não é capaz de estabelecer analiticamente relações envolvendo duas, três ou mais outras constantes.

Descrever analiticamente um problema usando a função de Lambert-Tsallis é algo que pode ser feito utilizando uma sequencia lógica de passos. Para tanto, parte-se do trinômio $x^n + a_m x^m + a_0 = 0$

 

com $n, m \in \mathbb{R}$ sendo $m < n$ e $a_m, a_0 \in \mathbb{C}$, conforme descrito abaixo:

$$
\begin{aligned}
x^n + a_m x^m + a_0 &= 0 \\
& \quad \textit{Isola-se o termo independente} \\
x^n + a_m x^m &= -a_0 \\
& \quad \textit{Coloca-se a menor potência de } x \textit{ em evidência} \\
x^m \left(1 + \frac{x^{n-m}}{a_m}\right) &= \frac{-a_0}{a_m} \\
& \quad \textit{Reescreve-se o binômio em termos de } exp_1(z) \\
x^m exp_1 \left(\frac{1}{a_m} x^{n-m}\right) &= \frac{-a_0}{a_m} \\
& \quad \wedge \left(r = \frac{n-m}{m}\right) \textit{ para igualar o expoente de } x \\
x^{rm} exp_r \left(\frac{r}{a_m} x^{n-m}\right) &= \left(\frac{-a_0}{a_m}\right)^r \\
& \quad \textit{Mesmo radical no lado esquerdo} \\
\left(\frac{r}{a_m} x^{rm}\right) exp_r \left(\frac{r}{a_m} x^{n-m}\right) &= \frac{r}{a_m} \left(\frac{-a_0}{a_m}\right)^r \\
& \quad \textit{Escreve-se a equação usando } W_r(z) \\
\therefore \frac{r}{a_m} x^{rm} &= W_r \left[\frac{r}{a_m} \left(\frac{-a_0}{a_m}\right)^r\right] \\
& \quad \textit{Expressão final de } x \\
\rightarrow x &= \left\{\frac{a_m}{r} W_r \left[\frac{r}{a_m} \left(\frac{-a_0}{a_m}\right)^r\right]\right\}^{1/(rm)} .
\end{aligned}
$$

# 3 Cálculo Numérico de $W_r(z)$

Um desafio que pode surgir no uso de $W_r(z)$ é o de como calcular os valores da função dados $r$ e $z$ na equação (4). No entanto, essa é uma tarefa simples e que pode ser feita utilizando uma lógica algorítmica através de algumas simples substituições. Segue

$$
\begin{aligned}
x\left(1 + \frac{x}{r}\right)^r &= z \\
& \quad r = \frac{n}{d} > 0, \textit{ considerando que } mdc(n,d) = 1 \\
x\frac{d}{n}\left(1 + x\frac{d}{n}\right)^{n/d} &= z\frac{d}{n} \\
& \quad y = x\frac{d}{n} \\
y(1+y)^{n/d} &= z\frac{d}{n} && (5) \\
& \quad k = (1+y)^{1/d} \\
(k^d - 1)k^n &= z\frac{d}{n} && (6)
\end{aligned}
$$

Sobre tal equação, observa-se que temos sempre um polinômio com coeficientes inteiros e positivos. Assim, uma vez encontrados os valores de $k$, é possível facilmente fazer o processo inverso $k \rightarrow y \rightarrow x$ através das equações (5) e (6), respectivamente, para obtermos o resultado original. Para o caso em que $r < 0$, onde se assume que $n < 0$ e $d > 0$, podemos prosseguir a partir de (6) para encontrar

$$k^d - k^{-n} z\frac{d}{n} - 1 = 0. \tag{7}$$

A partir das equações (6) e (7), pode-se inferir as seguintes informações quanto ao número de valores de $W_r(z)$.

Tabela 2: Quantidade de valores de $W_r(z)$ a depender do valor de $r$.

| $r$ | $\#W_r(z)$ |
|---|---|
| $\frac{n}{d} > 0$ | $n + d$ |
| $r \in \mathbb{Z}_*^+$ | $n + 1$ |
| $r \in \mathbb{Z}_*^-$ | $\lvert n \rvert$ |
| $r < 0$ | $\max(d, \lvert n \rvert)$ |
| $r = \frac{-1}{d} < 0$ | d |

O passo a passo descrito deixa claro que é fácil calcular a função $W_r(z)$ para valores arbitrários de $r \in \mathbb{Q}$. Além disso, a Tabela 2 indica a quantidade de valores no cálculo da função $W_r(z)$, dado fundamental para verificar a acurácia do algoritmo utilizado.

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0402  

# 4 Aplicações

Nos últimos quatro anos, a função $W_r(z)$ têm sido utilizada na descrição analítica das mais distintas aplicações em Física, Matemática e engenharia [11–13]. De fato, a ferramenta representa não apenas uma função especial com apenas 2 parâmetros, mas a real possibilidade de se encontrar solução analítica de problemas sem impor condições de convergência, uso de séries ou de conhecimentos prévios sobre a derivada da função, entre outros fatores. Essas são apenas algumas características que viabilizam o uso e divulgação dessa importante e nova função especial.

## 4.1 Teoria da Informação

Para ilustrar a simplicidade da função $W_r(z)$ se comparada a outras ferramentas, será considerada a modelagem da capacidade de um canal de comunicação [14, 15], onde $C = \log_2 x$ e $x$ é a única solução real positiva da seguinte equação trinomial:

$$x^N - x^{N-Q} - 1 = 0,\ N > Q > 0. \tag{8}$$

Analiticamente, a solução para esse problema [15] foi expressa como

$$\hat{x} = {}_1\Psi_1 \left[ \begin{matrix} \left(\frac{1}{N},\ \frac{N-Q}{N}\right) \\ \left(1+\frac{1}{N},\ \frac{-Q}{N}\right) \end{matrix} ;1 \right], \tag{9}$$

que faz uso da função de Fox-Wright (9) definida, para este caso, por

$${}_1\Psi_1 \left[ \begin{matrix} (\alpha,\ A) \\ (\beta,\ B) \end{matrix} ;z \right] = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + An)}{\Gamma(\beta + Bn)} \frac{z^n}{n!}. \tag{10}$$

De acordo com [15], a formulação analítica na resposta obtida é importante para analisar diversos fatores como pequenas perturbações nos canais, diferenças de capacidade, ver a relação entre capacidade e outros parâmetros do canal, etc. Apesar da elegância, contudo, é possível que um usuário se veja limitado pela natureza matemática da solução proposta, visto que a descrição analítica da função Fox-Wright envolve pelo menos cinco parâmetros, cuja funcionalidade associa-se unicamente à Matemática sem revelar qualquer *insight* do problema físico em questão. Além disso, a implementação computacional pode depender de fatores para que a convergência da solução seja garantida. Para os engenheiros, especialmente, essa discussão pode ser um fator limitante de viabilidade de uso.

Por outro lado, a solução do mesmo problema em termos de $W_r(z)$, após simples manipulações matemáticas gera

$$\tilde{x} = \left\{ \frac{-1}{r} W_r\left[-r\,(-1)^r\right] \right\}^{\frac{1}{Q}},\ \text{com } r = \frac{Q}{N-Q}. \tag{11}$$

Note que a solução em termos de $W_r(z)$ não corresponde à raiz real positiva do trinômio, mas sim a todas elas. Em [14] são apresentados os valores de $x$ representados por $2^{C(N,Q)}$. A tabela seguinte contém os valores de $x$ usando as soluções (9) e (11), mostrando total concordância entre as mesmas.

 

Tabela 3: Comparação de resultados numéricos usando as funções Fox-Wright e de Lambert-Tsallis.

| $2^{C(N,Q)}$ | $x = {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix}(\alpha,\ A)\\(\beta,\ B)\end{matrix};1\right]$ | $x = \left\{-\frac{1}{r}W_r\left[-r\,(-1)^r\right]\right\}^{1/Q}$ |
|---|---|---|
| $2^{C(2,1)}$ | 1.6180 | 1.6180 |
| $2^{C(3,1)}$ | 1.4656 | 1.4656 |
| $2^{C(3,2)}$ | 1.3247 | 1.3247 |
| $2^{C(4,2)}$ | 1.2720 | 1.2720 |
| $2^{C(5,1)}$ | 1.3247 | 1.3247 |

### 4.2 Outras aplicações

A função de Lambert-Tsallis tem-se mostrado uma potencial ferramenta analítica em diversos tipos de problema. Em seguida, estão descritos alguns com suas respectivas soluções. A citar:

Tabela 4: Apresentação de problemas e suas soluções usando $W_r(z)$.

| **Problema** | **Solução** | **Descrição** |
|---|---|---|
| $x^{n+1} - (1+\beta)x^n + \beta = 0$, para $0 < \beta < 1$ | $x = -\frac{1+\beta}{r}W_r\left[\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^r\left(\frac{-r}{1+\beta}\right)\right]$ para $r = \frac{1}{n}$ | Reformulação das equações para séries uniformes de pagamentos em matemática financeira [16] |
| $x^n - \alpha x + (\alpha - 1) = 0$, para $\alpha > 1$ | $x = \left\{-\frac{\alpha}{r}W_r\left[-\frac{r}{\alpha}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^r\right]\right\}^{1/r}$ para $r = n - 1$ | |
| $x^n - \gamma x^{n-1} + (\gamma - 1) = 0$, para $\gamma > 1$ | $x = -\frac{\gamma}{r}W_r\left[-\frac{r}{\gamma}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)^r\right]$ para $r = \frac{1}{n-1}$ | |
| $x^{n+1} - (\alpha+1)x + \alpha = 0$, para $\alpha > 1$ | $x = \left\{-\frac{\alpha+1}{r}W_r\left[-\frac{r}{\alpha+1}\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^r\right]\right\}^{1/r}$ para $r = n$ | |
| $z^n - az^k - 1 = 0$ | $z = \left\{-\frac{a}{r}W_r\left[-\frac{r}{a}\left(-\frac{1}{a}\right)^r\right]\right\}^{1/(rk)}$ para $r = \frac{n-k}{k}$ | Para $a = 1,6 + i$, chega-se em problema discutido em 1887 [17], 1928 [18] e 2012 |
| $a^x + b^x = c^x$ para $a < b < c \in \mathbb{R}$ | $x = \left[\frac{W_r(r)}{r}\right]^{1/(A-B)}$ com $A = ln(a/c)$, $B = ln(b/c)$ e $r = \frac{A-B}{B}$ | Problema de Fermat |

## 5 Conclusão

Apresentada à comunidade matemática, neste trabalho foi destacado o uso da função de Lambert-Tsallis como uma ferramenta analítica no cálculo de raízes de equações trinomiais com expoentes reais arbitrários, ressaltando propriedades, aspectos numéricos e procedimentos de uso da mesma. Aplicações em engenharias e Matemática também foram destacadas, incluindo resultados de problemas usando a $W_q(z)$ e comparando-os com outros métodos usados na literatura.

## Referências

[1] J. H. Lambert. “Observationes variae in mathesin puram”. Em: **Acta Helvetica** 3 (1758), pp. 128–168.

[2] L. Euler. “Deformulis exponentialibus replicatis. Reprinted in Leonhard Euleri Opera Omnia, Ser Prima”. Em: **Opera Mathematica** 15 (1927), pp. 268–297.

 

[3] P. G. Szabó. “On the roots of the trinomial equation”. Em: **Central European Journal of Operations Research** 18 (2010), pp. 97–104. DOI: 10.1007/s10100-009-0130-2.

[4] D. Belkić. “All the trinomial roots, their powers and logarithms from the Lambert series, Bell polynomials and Fox–Wright function: Illustration for genome multiplicity in survival of irradiated cells”. Em: **J Math Chem** 57 (2019), pp. 59–106. DOI: /10.1007/s10910-018-0985-3.

[5] M. L. Glasser. “Hypergeometric functions and the trinomial equation”. Em: **Journal of Computational and Applied Mathematics** 118 (2000), pp. 169–173. DOI: 10.1016/S0377-0427(00)00287-9.

[6] V. F. Guedes, K. Z. Nobrega e R. V. Ramos. “Analytical Solution of the Space Charge Limited Current Using Lambert–Tsallis Wq Function”. Em: **IEEE Transactions on Electron Devices** 69 (2022), pp. 5787–5791. DOI: 10.1109/TED.2022.3183559.

[7] J. S. de Andrade, K. Z. Nobrega e R. V. Ramos. “Analytical Solution of the Current-Voltage Characteristics of Circuits With Power-Law Dependence of the Current on the Applied Voltage Using the Lambert-Tsallis Wq Function”. Em: **IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs** 69 (2022), pp. 769–773. DOI: 10.1109/TCSII.2021.3110407.

[8] R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey e D. E. Knuth. “On the Lambert W function”. Em: **Advances in Computational Mathematics** 5 (1996), pp. 329–359. DOI: 10.1007/BF02124750.

[9] C. Tsallis. “What are the numbers that experiments provide?” Em: **Quimica Nova** 17 (1994), pp. 468–471.

[10] G.B. da Silva e R.V. Ramos. “The Lambert–Tsallis Wq function”. Em: **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications** 525 (2019), pp. 164–170. DOI: 10.1016/j.physa.2019.03.046.

[11] R. L. C. Damasceno, J. S. de Andrade e R. V. Ramos. “Applications of the Lambert-Tsallis Wq function in QKD”. Em: **J. Opt. Soc. Am. B** 40 (2023), pp. 2280–2286. DOI: 10.1364/JOSAB.489059.

[12] F. J. L de Almeida e R. V. Ramos. “Disentropy in astronomy”. Em: **Eur. Phys. J. Plus** 138.1 (2023), p. 20. DOI: 10.1140/epjp/s13360-022-03640-4.

[13] J. R. da Silva e R. V. Ramos. “Applications of the Lambert–Tsallis Function in X-Ray Free Electron Laser”. Em: **IEEE Transactions on Plasma Science** 50.10 (2022), pp. 3578–3582. DOI: 10.1109/TPS.2022.3205545.

[14] A.R. Miller e I.S. Moskowitz. “Reduction of a class of Fox-Wright psi functions for certain rational parameters”. Em: **Computers Mathematics with Applications** 30 (1995), pp. 73–82. DOI: 10.1016/0898-1221(95)00165-U.

[15] I.S. Moskowitz e A.R. Miller. “Simple timing channels”. Em: **Proceedings of 1994 IEEE Computer Society Symposium on Research in Security and Privacy**. 1994, pp. 56–64. DOI: 10.1109/RISP.1994.296592.

[16] V. Botta e J. V. da Silva. “Raízes de equações trinomiais e quadrinomiais”. Dissertação de mestrado. UNESP, 2018.

[17] P. Nekrassoff. “Ueber trinomische Gleichungen”. Em: **Math. Ann.** 29 (1887), pp. 413–430. URL: http://eudml.org/doc/157293.

[18] M. Biernacki. “Sur les équations algébriques contenant des paramètres arbitraires”. Tese de doutorado. Faculté des Sciences de Paris, 1928. URL: http://www.numdam.org/item/THESE_1928__86__1_0.pdf.

 