

Efeito da Vorticidade na Evolução da Magnetização em Escoamentos de Fluidos Magnéticos

Camila de O. Vieira¹

Centro Multidisciplinar de Luís Eduardo Magalhães, UFOB, Luís Eduardo Magalhães, BA

Yuri D. Sobral²

Departamento de Matemática, UnB, Brasília, DF

Francisco R. da Cunha³

Departamento de Engenharia Mecânica, UnB, Brasília, DF

Resumo. Neste trabalho, estudamos escoamentos de fluidos magnéticos em uma cavidade com parede superior móvel. Para resolver o escoamento estabelecemos uma formulação vorticidade-função de corrente e para entender o mecanismo da interação da magnetização no escoamento utilizamos a equação de evolução da magnetização de Shliomis. A fim de entender essa contribuição da equação da magnetização no escoamento, fragmentamos a equação da magnetização nos termos de equilíbrio e advecção, que foi visto em [8], e com os efeitos de equilíbrio, advecção e vorticidade. O efeito do termo da vorticidade na equação da magnetização além alterar as estruturas vorticais do escoamento, causa altos desalinhamentos da magnetização em relação a magnetização de equilíbrio.

Palavras-chave. cavidade, parede superior móvel, fluido magnético, magnetização, diferenças finitas, formulação vorticidade-função de corrente, equações de Shliomis.

1 Introdução

O escoamento em uma cavidade com a parede superior móvel é um dos problemas clássicos em Dinâmica dos Fluidos Computacional. Um estudo minucioso de revisão sobre o problema da cavidade para fluidos newtonianos foi feito por Shankar e Deshpande, em [3], em que eles abordam vários trabalhos com distintas configurações de cavidade.

Após essa análise minuciosa do problema clássico, foram investigados escoamentos de fluidos biomagnéticos (BFD), como por exemplo, o sangue, em cavidades retangulares, veja em [6]. Utilizou-se a formulação vorticidade-função de corrente, com a hipótese de superparamagnetismo para a equação da magnetização, no qual foram obtidos, principalmente, resultados relacionados a problemas não-isotérmicos. Recentemente, um estudo apresentado em [5] simulou escoamentos de fluidos magnéticos em uma cavidade, considerando a equação completa da magnetização de Shliomis, no qual foram obtidas estruturas vorticais no escoamento diferentes das observadas em casos na ausência de campo magnético. As condições de contorno utilizadas pelos autores, porém, não parecem reproduzir uma situação física real, pois se baseiam apenas em formulações matemáticas de condições de contorno de Dirichlet ou Neumann que não têm interpretação física em problemas de magnetismo.

O objetivo principal deste trabalho foi simular escoamentos de fluidos magnéticos em uma cavidade quadrada bidimensional utilizando uma formulação vorticidade-função de corrente, incorporando a equação de evolução da magnetização de Shliomis [4]. Visto isso, em [8] foram

¹camila.vieira@ufob.edu.br

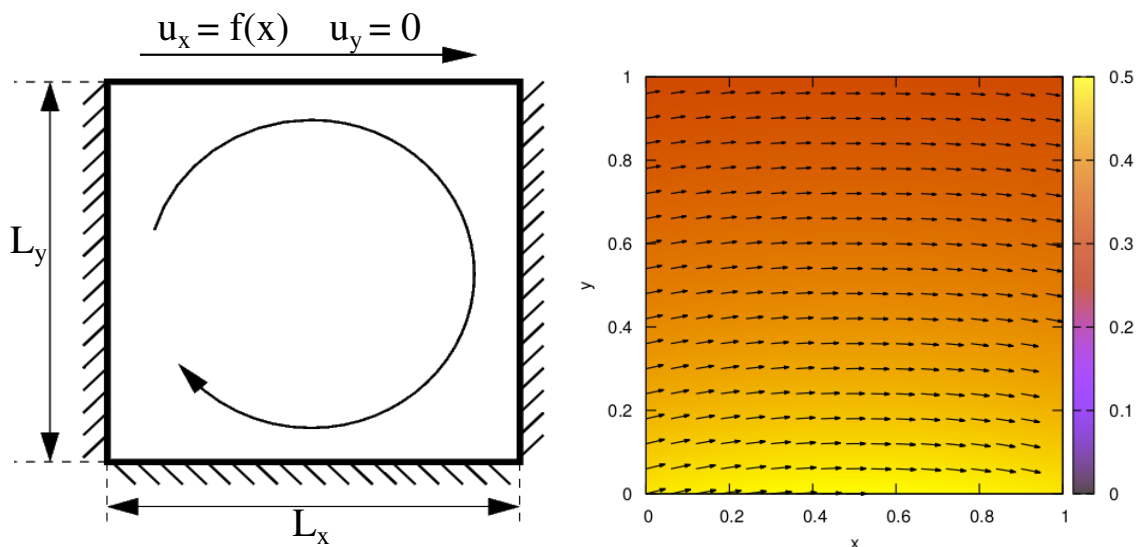
²ydsobral@unb.br

³frcunha@unb.br

investigados escoamentos de fluidos magnéticos sob a influência dos termos de equilíbrio e de advecção da equação da magnetização de Shliomis, em [35]. Neste trabalho, temos o objetivo de explorar os efeitos de cada termo da equação da magnetização de Shliomis, à saber, os termos de equilíbrio, convectivo e vorticidade, a fim de destacar as principais contribuições que cada um deles tem na dinâmica do escoamento na cavidade.

2 Formulação do Problema

Neste trabalho, vamos resolver o problema da cavidade laminar, em que a parede superior é móvel de acordo com a Figura 1(a), para um fluido magnético. O escoamento é bidimensional e incompressível e o campo magnético aplicado é gerado por um fio condutor por onde passa uma corrente elétrica localizado próximo a parede inferior da cavidade, conforme a Figura 1 (b).



(a) Geometria do problema da cavidade hidrodinâmica. Neste trabalho, $L_x = L_y$. (b) Campo magnético considerado neste trabalho.

Figura 1: O problema da cavidade. Fonte: dos autores.

2.1 Equações Governantes

As equações governantes que regem este problema são a equação da continuidade e de Navier-Stokes, respectivamente, ver em [2, 7],

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + C_{pm} \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} + \frac{1}{2} C_{pm} \nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}), \quad (2)$$

em que o termo $\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}$, é a força de Kelvin e $\nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H})$ é a força de torque magnético. Neste termo, \mathbf{M} representa a magnetização do fluido e \mathbf{H} o campo magnético.

De acordo com [7, 8], utilizamos a formulação vorticidade-função de corrente, que resultou em um sistema com uma equação de Poisson para a função de corrente (ψ) e uma equação da advecção para a vorticidade (ξ), respectivamente, em termos adimensionais:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\xi, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} + u_x \frac{\partial \xi}{\partial x} + u_y \frac{\partial \xi}{\partial y} &= \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) + C_{pm} \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} \frac{\partial H_y}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial x} \frac{\partial H_y}{\partial y} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial M_x}{\partial y} \frac{\partial H_x}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} \frac{\partial H_x}{\partial y} \right), \end{aligned} \tag{4}$$

Para a equação da magnetização, utilizamos a equação de evolução de Shliomis [4], e consideramos apenas o termo da advecção e da vorticidade, maiores detalhes em [7], temos que

$$\frac{\partial M_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial M_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial M_x}{\partial y} = -\frac{1}{\tau} (M_x - M_{0x}) - \frac{1}{2} \xi M_y, \tag{5}$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial M_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial M_y}{\partial y} = -\frac{1}{\tau} (M_y - M_{0y}) + \frac{1}{2} \xi M_x, \tag{6}$$

onde

$$M_{0x} = \zeta \mathcal{L}(\alpha) \frac{H_x}{|H|} \quad \text{e} \quad M_{0y} = \zeta \mathcal{L}(\alpha) \frac{H_y}{|H|}, \tag{7}$$

é a magnetização para um fluido em equilíbrio e $\mathcal{L}(\alpha)$ a função Langevin, dada por,

$$\mathcal{L}(\alpha) = \coth \alpha - \frac{1}{\alpha}, \quad \text{em que} \quad \alpha = \frac{\mu_0 m H}{kT},$$

é a intensidade adimensional do campo magnético, m é o momento de dipolo magnético das partículas magnéticas, k é a constante de Boltzmann e T é a temperatura.

Os parâmetros adimensionais do problema são dados por:

$$Re = \frac{L_x \rho U}{\mu}, \quad C_{pm} = \frac{\mu_0 H_0^2}{\rho U^2}, \quad \tau = \frac{\bar{\tau} U}{L_x}, \quad \zeta = \frac{M_s}{H_0}, \quad \alpha = \frac{\mu_0 m H}{kT}, \tag{8}$$

onde o número de Re representa a razão entre forças inerciais e forças viscosas, C_{pm} representa a razão entre pressão magnética e pressão hidrodinâmica, τ é o tempo adimensional dado pela razão entre o tempo característico do escoamento e o tempo de relaxação magnética. ζ é o parâmetro adimensional relacionado com a magnetização de saturação do ferrofluido em relação a uma escala de campo magnético. α é o parâmetro adimensional do campo aplicado, ou seja, ele representa o argumento da função de Langevin.

Conforme em [8], como não resolvemos localmente o campo magnético, vamos supor que $|\mathbf{M}| \ll |\mathbf{H}|$, de forma que o fluido é fracamente magnetizável. Portanto,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\mathbf{M} + \mathbf{H}) \approx \nabla \cdot \mathbf{H} = 0,$$

O campo aplicado adimensional, é dado por, [6]

$$H_x = \frac{y - b}{(x - a)^2 + (y - b)^2}, \quad H_y = -\frac{x - a}{(x - a)^2 + (y - b)^2}, \tag{9}$$

em que (a, b) é a localização do fio condutor. Neste trabalho, tomamos $(a, b) = (0.5, 2)$, e o campo resultante é o apresentado na Figura 1 (b).

2.2 Simulação Numérica

De acordo com [1] utilizamos para a placa móvel superior uma velocidade $u_x(x, 1) = \sin^2(\pi x)$. Utilizamos diferenças finitas de ordem 2 para discretizar as derivadas espaciais e para as derivadas temporais, utilizamos o método de Euler. Para a vorticidade nas paredes usamos o método da extrapolação, conforme em [1]. Desta forma, obtemos um erro $\mathcal{O}(\Delta t, \Delta x^2)$ no sistema. Para resolver o Problema de Poisson utilizamos o método iterativo de SOR.

3 Interação da vorticidade com a magnetização: efeitos no escoamento

Como foi dito anteriormente, nesta seção temos como objetivo analisar a influência dos efeitos da equação da magnetização com os termos de equilíbrio, convectivo e vorticidade. Queremos pontuar as principais mudanças no escoamento em relação ao que foi visto em [8], pois quando adicionamos o termo de vorticidade na equação da magnetização (5) e (6) teremos um desalinhamento da magnetização com a vorticidade. No que segue, os resultados foram plotados para um valor fixo de $Re = 500$.

A Figura (2), mostra as linhas de corrente para $C_{pm} = 0$ e para $C_{pm} = 10^3$. Comparando os escoamentos das Figuras (2)(a) e (b), vemos que com a equação da magnetização, notamos que o vórtice principal move-se para o lado direito da cavidade, no sentido da placa móvel. O que ocorre na Figura (2)(b) é explicado pela Figura (2)(c), onde podemos ver as linhas da força magnética agindo no escoamento. Observamos que, a partir de $x = 0.6$, as linhas de força estão sendo apontadas para a direita, indicando que a força está puxando uma porção fluida considerável nesta região e conseqüentemente comprimindo o vórtice localizado na parte inferior direita. Por outro lado, olhando a região em que $0 < x < 0.6$ notamos que a força está apontando quase que verticalmente para baixo, o que explica a Figura (2)(b) o fato do fluido está movendo-se para baixo da cavidade.

Em correspondência aos resultados das Figuras (2)(a) e (b), o campo de velocidade para estes escoamentos, nos mostram as regiões de altos e baixos gradientes de velocidades. Na Figura (3) podemos observar uma mudança no comportamento do campo velocidade entre $C_{pm} = 0$ e $C_{pm} = 10^3$, pois como vemos na Figura (3)(b), o fluido em alta velocidade concentrado perto das paredes superior e direita escoam em uma região mais próxima a parede inferior do que a da Figura (3)(a), indicando a compatibilidade com as linhas de força atrativas, que vimos na Figura (2)(c). Igualmente podemos ver na Figura (3)(b) as velocidades menos intensas nas regiões em que o fluido é contido pela força magnética. Concluímos, então, que a distribuição de fluido escoando a altas e baixas velocidade na cavidade são alteradas devido a força de campo magnético.

A Figura (4) compara o desvio angular da magnetização, quando tomamos a equação da magnetização com os termos da advecção e de equilíbrio, conforme pode ser visto em [8], e com a equação com os termos da advecção, equilíbrio e vorticidade. É evidente que os principais desvios são causados pela interação da vorticidade na magnetização, podendo alcançar um desvio angular até 200° . O termo convectivo tem uma contribuição pequena no escoamento, apenas próximo a parede superior.

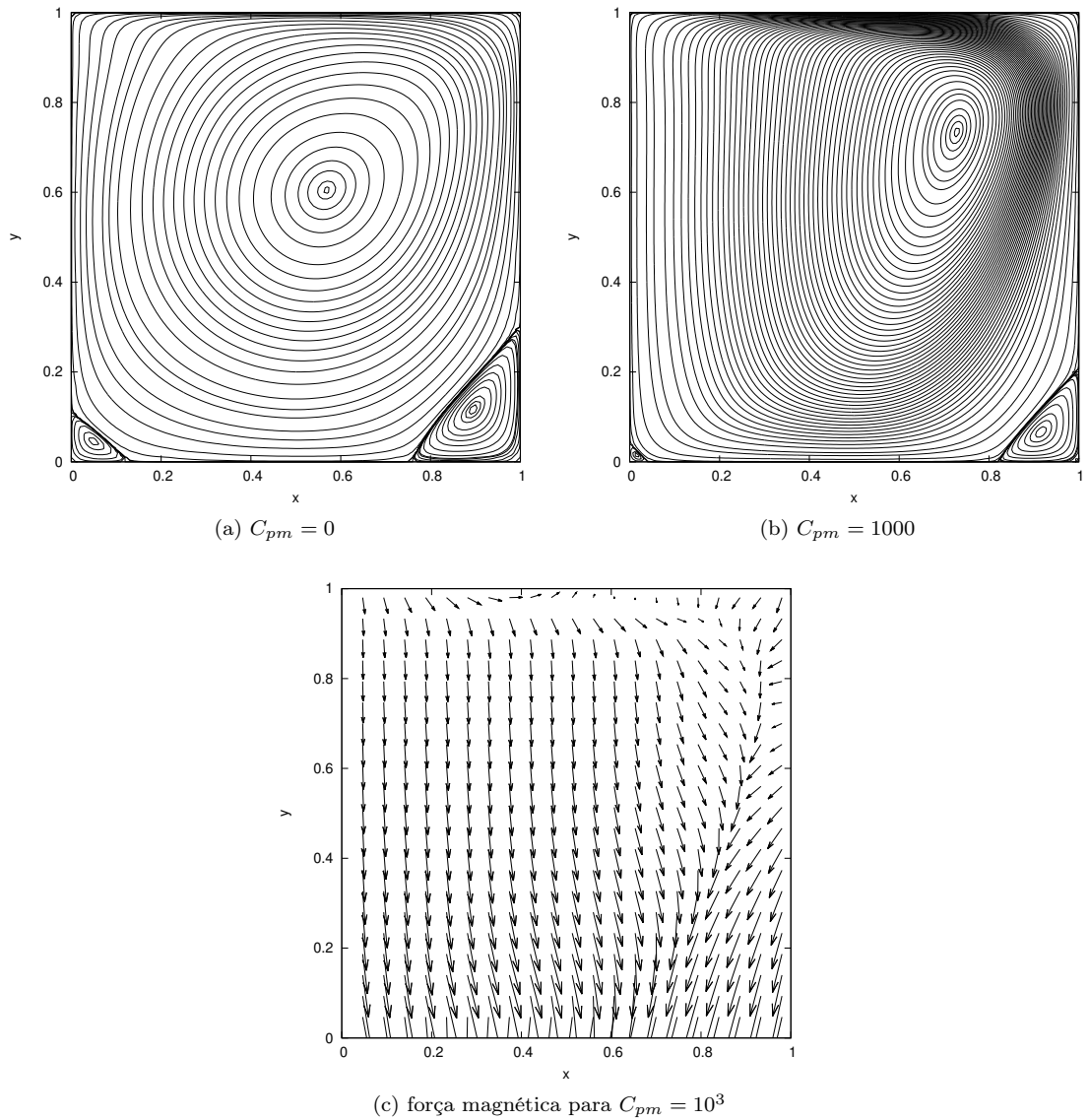


Figura 2: Linhas de corrente para $Re = 500$ em que o item (a) representa $C_{pm} = 0$, o item (b) representa $C_{pm} = 10^3$ e o item (c) representa a força magnética para $C_{pm} = 10^3$. Fonte: dos autores.

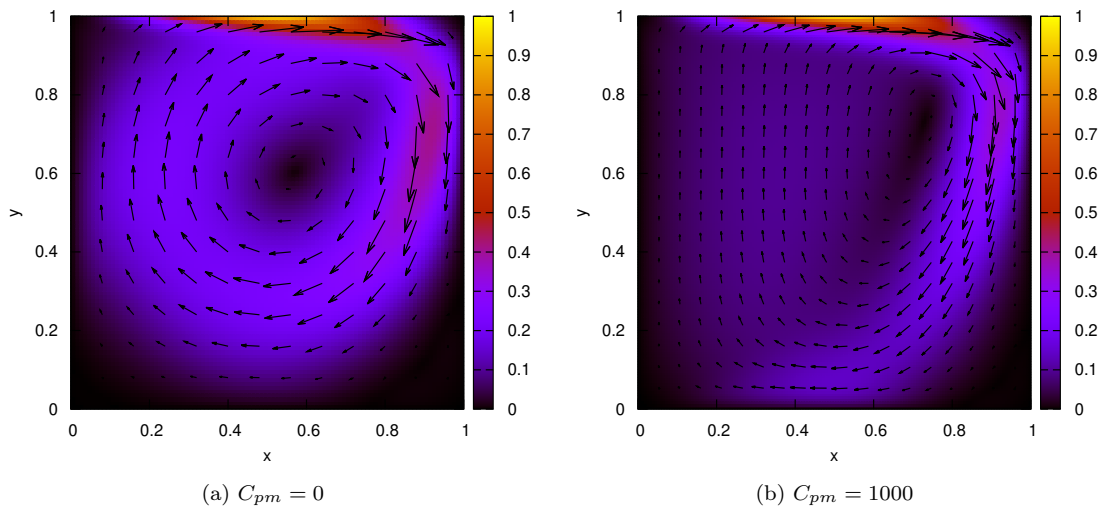


Figura 3: Módulo do campo velocidade para (a) $C_{pm} = 0$ e (b) $C_{pm} = 10^3$.

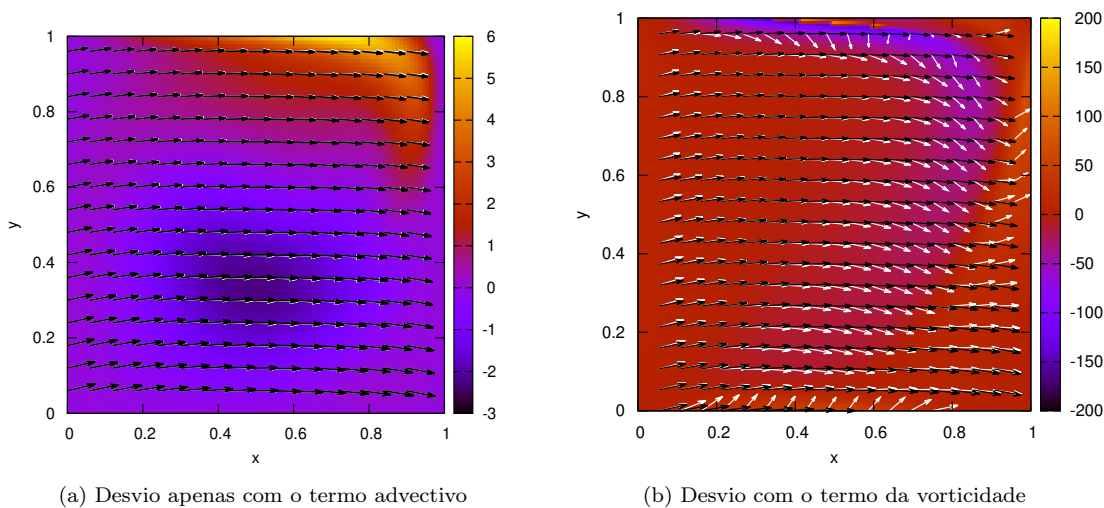


Figura 4: Desvio da magnetização, dado em graus para $C_{pm} = 10^3$. Os vetores branco representam a magnetização local e os vetores preto representam a magnetização de equilíbrio local. O item (a) representa o desvio com o termo advectivo e o item (b) representa o desvio com o termo da vorticidade. Fonte: dos autores.

4 Considerações Finais

Neste trabalho, apresentamos os resultados para um fluido magnético cuja magnetização interage com o escoamento pelo termo de advecção e o termo da vorticidade, [7]. Nos próximos trabalhos, queremos incluir o termo precessional na equação de Shliomis [4] para investigar as alterações no escoamento causadas por estes termos. Vimos que os desvios angulares se dão nos locais de maiores vorticidade. As forças magnéticas causam uma alteração importante na topologia do escoamento.

Referências

- [1] E. J. Hinch. **Think Before You Compute: A Prelude to Computational Fluid Dynamics**. Cambridge Texts in Applied Mathematics, 2020.
- [2] R. E. Rosensweig. **Ferrohydrodynamics**. Courier Corporation, 2013.
- [3] P.N. Shankar e M.D. Deshpande. “Fluid mechanics in the driven cavity”. Em: **Annual Review of Fluid Mechanics** 32 (2000), pp. 93–136.
- [4] M. I. Shliomis. “Effective viscosity of magnetic suspensions”. Em: **Zh. Eksp. Teor. Fiz** 61 (1971), s1971d.
- [5] C. Singh, A. K. Das e P. K. Das. “Flow restrictive and shear reducing effect of magnetization relaxation in ferrofluid cavity flow”. Em: **Physics of Fluids** 28 (2016), p. 087103.
- [6] E. E. Tzirtzilakis e M. A. Xenos. “Biomagnetic fluid flow in a driven cavity”. Em: **Meccanica** 48 (2013), pp. 187–200.
- [7] C. O. Vieira. “Simulação Computacional de Escoamentos de Fluidos Magnéticos em Cavidades”. Tese de doutorado. DMAT/UnB, 2018.
- [8] C. O. Vieira Y. D. Sobral F. R. Cunha. “Escoamentos de fluidos magnéticos em uma cavidade”. Em: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics** 9 (2022).