Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

# Buscando os dois Caminhos Mínimos Disjuntos mais Confiáveis em uma Rede de Fluxo Multiestado com Restrição de Tempo

Majid Forghani-elahabad[1], Nicolas T. Matos[2]
CMCC/UFABC, Santo André, SP

**Resumo**. Este artigo aborda o desafio de encontrar os dois Caminhos Mínimos Disjuntos (CMDs) mais confiáveis de uma rede de fluxo multiestado para transmitir $d$ unidades de dados do nó de origem para o nó de destino em um período de $T$ unidades de tempo. Definimos a confiabilidade de um Caminho Mínimo (CM) e calculamos a quantidade máxima de dados que pode ser enviada através de um CM em $T$ unidades de tempo. Em seguida, determinamos todas as possibilidades de divisão de $d$ unidades de dados entre dois CMDs. Por fim, propomos um algoritmo para encontrar os CMDs desejados e ilustramos o método por meio de um exemplo de rede de referência.

**Palavras-chave**. Confiabilidade, Redes de fluxo multiestado, Caminhos mínimos disjuntos, Caminhos mais confiáveis, Otimização.

## 1 Introdução

O desafio do caminho mais rápido consiste em identificar um percurso do nó de origem para o nó de destino dentro de uma rede. Esse percurso é utilizado para transmitir de maneira eficiente uma quantidade específica de fluxo, $d$, minimizando o tempo de transmissão [2]. Nesse problema, cada arco da rede é caracterizado por dois atributos-chave: um valor de *tempo de espera* e um valor de *capacidade*. A importância desse problema de otimização é amplamente reconhecida pelos pesquisadores, dada sua aplicabilidade em uma variedade de cenários em redes de fluxo [2, 4, 8, 9, 11].

As Redes de Fluxo Multiestado (RFMs) são essenciais para simular sistemas complexos afetados por variações, falhas e manutenção, onde arcos e nós podem variar entre estados devido a múltiplos fatores. A confiabilidade dessas redes é comumente definida como a capacidade do sistema de cumprir uma função predefinida dentro de condições especificadas e em um intervalo de tempo conhecido [1, 4, 6, 7, 10, 13, 14].

[1]m.forghani@ufabc.edu.br
[2]m.nicolas@aluno.ufabc.edu.br

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0356

O problema clássico do caminho mais rápido evoluiu para um desafio mais abrangente conhecido como o problema de confiabilidade do caminho mais rápido (CCMR) no contexto de RFMs [3, 4, 7, 9, 12]. O principal objetivo do CCMR é determinar a probabilidade de transmitir com sucesso no mínimo $d$ unidades de fluxo do nó de origem até o nó de destino por um único caminho dentro de $T$ unidades de tempo. Este problema foi então estendido para permitir que o fluxo seja transmitido através de dois ou mais caminhos mínimos disjuntos (CMDs) [7, 8].

Embora muitos pesquisadores tenham abordado o problema de CCMR e suas extensões [5, 7–9, 12], poucas pessoas consideraram o problema de encontrar os CMs mais confiáveis na rede [8]. Portanto, este trabalho estuda o problema de encontrar os dois CMDs mais confiáveis de uma RFM para transmitir $d$ unidades de dados do nó de origem para o nó de destino dentro $T$ unidades de tempo, e propõe um algoritmo para abordá-lo.

O restante do trabalho está organizado da seguinte forma. A Seção 2 fornece os fundamentos necessários sobre o problema. A Seção 3 descreve o problema com mais detalhes e apresenta novos resultados. Ela também propõe um algoritmo para abordar o problema. A Seção 4 ilustra o algoritmo por meio de um exemplo de referência, e por fim, concluímos o trabalho na seção 5.

## 2 Preliminares e Fundamentação Conceitual

Considere uma rede de fluxo multiestado (RFM) representada por $G(N, A, M, L)$, onde $N = \{1, 2, \cdots, n\}$ é o conjunto de nós, com $n$ sendo o número total de nós, $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ é o conjunto de arcos (arestas), com $m$ sendo o número total de arcos, $M = (M_1, \cdots, M_m)$ é um vetor com $M_i$ definindo a capacidade máxima do arco $a_i$, para $i = 1, \cdots, m$, e $L = (l_1, \cdots, l_m)$ é um vetor de tempo de espera com $l_i$ representando o tempo de espera da aresta $a_i$ para $1 \leq i \leq m$. Os nós 1 e $n$ são o nó origem e o nó destino, respectivamente.

Seja $X = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$ o vetor de estado atual do sistema (VES), onde $x_i$ representa a capacidade atual da aresta $a_i$, assumindo um valor inteiro aleatório em $\{0, 1, \cdots, M_i\}$, para $i = 1, \cdots, m$. Observa-se que $M$ é, por si só, um VES. Seja $T$ o limite de tempo de transmissão. Considere $d$ como um número inteiro não negativo que representa o valor da demanda, ou seja, a quantidade mínima do fluxo que deveria ser transmitido do nó 1 para o nó $n$.

Um caminho é uma sequência de arcos adjacentes do nó 1 para o nó $n$. Um Caminho Mínimo (CM) é um caminho que não possui nenhum nó repetido. Por exemplo, $P = \{a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_9\}$ é um caminho do nó 1 para o nó 6 na Figura 1, mas não é um CM. No entanto, $P' = \{a_2, a_6, a_9\}$ é um subconjunto de $P$ que é um CM nesta rede. Sejam $h$ o número de CMs, e $P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_h$ todos os CMs na rede. Por exemplo, existem 13 CMs na Figura 1 de nó 1 ao nó 6.

Dois CMs $P_1$ e $P_2$ são chamados disjuntos se não tiverem nenhum arco em comum, ou seja, se $P_1 \cap P_2 = \emptyset$. Para $j = 1, 2, \cdots, h$, seja $E_j = \{P_i |\ P_i \cap P_j = \emptyset\}$ o conjunto de todos os CMs que são disjuntos do $P_j$. Seja $D = (d_1, d_2)$ um vetor de política, onde $d_1$ e $d_2$ denotam a quantidade de fluxo a ser enviado através de dois CMDs $P_i$ e $P_j$, respectivamente. Com o objetivo de enviar as $d$

 

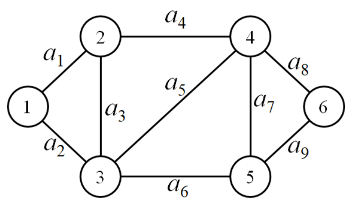


Figura 1: Uma rede de referência com nove arestas e seis nós, retirada de [4].

unidades de fluxo de nó 1 ao nó $n$ através de dois CMDs, o vetor $D$ determina quantas unidades de fluxo deveriam ser transmitidas por cada CM, e por isso é chamado de *vetor de política.* Portanto, sempre devemos ter $d_1 + d_2 = d$.

A capacidade de um CM refere-se à quantidade máxima de fluxo que pode ser transportado por ele simultaneamente. Assim, definimos a capacidade de $P_j$ sob o VES $X$ como $KP_j(X) = \min\{x_i | a_i \in P_j\}$, para cada $j = 1, 2, \cdots, h$. Neste trabalho, seguindo a literatura [8], supomos que cada nó é completamente confiável, as capacidades dos arcos seguem uma função de distribuição de probabilidade determinada, a capacidade de cada arco é estatisticamente independente das capacidades dos outros arcos e que o fluxo é enviado da origem para o destino através de apenas dois CMDs, respeitando a lei de conservação de fluxo.

## 3 Dois caminhos mínimos disjuntos mais confiáveis

O principal objetivo deste trabalho é encontrar os dois caminhos mínimos disjuntos (CMDs) mais confiáveis na rede, considerando o limite de tempo $T$ para a transmissão de $d$ unidades de fluxo por meio desses caminhos. Para atingir esse propósito, é crucial, primeiramente, compreender o conceito do tempo de espera de um CM e o tempo necessário para transmitir uma quantidade específica de dados por meio de um CM. Ademais, é necessário estabelecer uma definição clara para a confiabilidade de um CM.

Conforme a literatura [2, 5, 9], o tempo de espera de um CM é a soma dos tempos de espera de seus arcos. Portanto, ao considerar $LP_j$ como o tempo de espera do $P_j$, temos $LP_j = \sum_{i:\ a_i \in P_j} l_i$. Além disso, o tempo de transmissão para enviar $d$ unidades de dados através do CM, $P_j$, sob o VES $X$, é igual a [3, 5, 9]

$$\xi(d, X, P_j) = LP_j + \left\lceil \frac{d}{KP_j(X)} \right\rceil . \tag{1}$$

Vale ressaltar que, conforme as suposições, a capacidade de cada arco na rede é um número inteiro não negativo, seguindo uma função de distribuição de probabilidade (FDP) determinada. Por exemplo, a FDP da Figura 1 está apresentada na Tabela 1, de acordo com a qual a probabilidade de a capacidade de $a_5$ ser 2 é $\Pr(x_5 = 2) = 0,9$.

Tabela 1: A função de distribuição de probabilidade de capacidades dos arcos na Figura 1.

| Capacidade \ Arco | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ | $a_9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,05 | 0,05 | 0,05 | 0,05 | 0,05 | 0,05 | 0,05 | 0,05 | 0,05 |
| 1 | 0,05 | 0,05 | 0,05 | 0,05 | 0,05 | 0,1 | 0,05 | 0,05 | 0,05 |
| 2 | 0,05 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,9 | 0,85 | 0,1 | 0,05 | 0,1 |
| 3 | 0,05 | 0,8 | 0,1 | 0,8 | - | - | 0,1 | 0,05 | 0,8 |
| 4 | 0,1 | - | 0,7 | - | - | - | 0,7 | 0,1 | - |
| 5 | 0,7 | - | - | - | - | - | - | 0,7 | - |

Seguindo um raciocínio semelhante, a probabilidade de a capacidade de $P_1 = \{a_1, a_3, a_5, a_7, a_9\}$ ser 2 é $\Pr(KP_1 = 2) = \Pr(x_1 \geq 2) \times \Pr(x_3 \geq 2) \times \Pr(x_5 \geq 2) \times \Pr(x_7 \geq 2) \times \Pr(x_9 \geq 2) = 0,9 \times 0,9 \times 0,9 \times 0,9 \times 0,9 = 0,59049$. Essa probabilidade é denominada confiabilidade de $P_1$ para transmitir 2 unidades de fluxo simultaneamente, o que nos leva à seguinte definição.

**Definição 3.1.** *A confiabilidade do caminho mínimo $P_j$ para a transmissão de $d$ unidades de fluxo simultaneamente é*

$$C_d(P_j) = \prod_{a_i \in P_j} \Pr(x_i \geq d). \tag{2}$$

Como temos $d$ unidades de dados para transmitir do nó 1 ao nó $n$ através de dois CMDs $P_i$ e $P_j$, precisamos dividir essa quantidade entre os dois caminhos. A equação (1) mostra que o tempo de espera de transmissão pode aumentar com um aumento na quantidade de dados transmitidos. Portanto, é fundamental determinar como dividir as $d$ unidades de dados entre os dois caminhos. Como os dois caminhos são disjuntos, devemos distribuir os dados entre os caminhos de modo que a quantidade correspondente de cada caminho seja transmitida dentro de $T$ unidades de tempo, mantendo a capacidade utilizada do caminho o mais baixa possível o que aumenta a confiabilidade do caminho. Os autores em [5, 9] mostraram que a capacidade mínima necessária para o $P_j$ permitir a transmissão de $d_j$ unidades de dados através dele dentro de $T$ unidades de tempo é

$$\alpha_j = \left\lceil \frac{d_j}{T - LP_j} \right\rceil \tag{3}$$

O resultado a seguir apresenta a quantidade máxima de dados que pode ser transmitida por um CM dentro de $T$ unidades de tempo.

**Lema 3.1.** *Para o caminho mínimo $P_j$, com capacidade $KP_j(M) = \min\{M_i | a_i \in P_j\}$ e tempo de espera $LP_j$, a quantidade máxima de dados que pode ser enviada por $P_j$ é*

$$\gamma_j = KP_j(M)(T - LP_j) \tag{4}$$

*Demonstração.* Conforme a equação (1), o tempo de transmissão de $d$ unidades de dados através do $P_j$ é dado por $\xi(d, M, P_j) = LP_j + \lceil \frac{d}{KP_j(M)} \rceil$. Portanto, para que este tempo seja inferior a $T$, é necessário que

$$LP_j + \left\lceil \frac{d}{KP_j(M)} \right\rceil \leq T \Longrightarrow \frac{d}{KP_j(M)} \leq \left\lceil \frac{d}{KP_j(M)} \right\rceil \leq T - LP_j \Longrightarrow d \leq KP_j(M)(T - LP_j)$$

□

Portanto, temos o seguinte resultado disponível.

**Lema 3.2.** .

1. *É possível transmitir $d$ unidades de dados através dos dois CMDs $P_i$ e $P_j$ dentro de $T$ unidades de tempo se, e somente se, $d \leq \gamma_i + \gamma_j$, considerando a equação* (4)*.*

2. *Se $d \leq \gamma_i + \gamma_j$, considerando, sem perca de generalidade, que $\gamma_i = \max\{\gamma_i, \gamma_j\}$ e denotando $\beta = \max\{0, d - \gamma_i\}$, o conjunto de todos os vetores de política possíveis para transmitir $d$ unidades de fluxo através de $P_i$ e $P_j$ dentro de $T$ unidades de tempo é*

$$\{(\beta, d-\beta), (\beta+1, d-\beta-1), \cdots, (\min\{d, \gamma_i\}, d - \min\{d, \gamma_i\})\} \tag{5}$$

Considerando as análises realizadas nesta seção, sugerimos o seguinte algoritmo para determinar os dois CMDs mais confiáveis na rede especificada, respeitando o prazo $T$ para transmissão de $d$ unidades de tempo.

**Algoritmo 1** (Encontrar os dois CMDs mais confiáveis na rede para transmitir $d$ unidades de dados dentro de $T$ unidades de tempo)

**Entrada:** Uma rede de fluxo multiestado $G(N, A, M, L)$, juntamente com a função de distribuição de probabilidade das capacidades dos arcos, a demanda $d$ e o limite de tempo $T$.

**Saída:** Os dois CMDs mais confiáveis da rede.

**Passo 1.** Encontrar todos os Caminhos Mínimos (CMs), $P_1$, $P_2$, ..., $P_h$, na rede e determinar os conjuntos $E_j$, para $j = 1, 2, \cdots, h$. Seja $I$ um vetor cujos componentes são os índices dos conjuntos $E_j$ não vazios. Calcular $\gamma_j$, para $j \in I$, pela equação (4). Deixe $i = 1$.

**Passo 2.** Se $i > |I|$, onde $|I|$ é o número de componentes de $I$, então ir para o Passo 6. Se $E_{I(i)} = \emptyset$, incrementar $i$ em 1 e refazer este passo.

**Passo 3.** Supor que $j$ é o índice do primeiro CM em $E_{I(i)}$. Se $d > \gamma_{I(i)} + \gamma_j$, então ir para o Passo 5. Caso contrário, determinar todos os vetores de política conforme estabelecido no Lema 3.2 e utilizar a equação (3) para calcular as capacidades mínimas necessárias para $P_j$ e $P_{I(i)}$ com base nesses vetores de política.

**Passo 4.** Para cada par de capacidades mínimas calculado no Passo 3, calcular o produto das confiabilidades dos CMs defenidas na equação (2). Seja $C(I(i), j)$ a confiabilidade máxima dos dois CMDs correspondente a todos os vetores de política.

**Passo 5.** Remover $P_j$ de $E_{I(i)}$ e $P_{I(i)}$ de $E_j$. Se $E_{I(i)} = \emptyset$, incrementar $i$ em 1. Ir para o Passo 2.

**Passo 6.** Os dois CMDs com a maior $C(I(i), j)$ são os caminhos mais confiáveis na rede para a missão determinada. Parar.

# 4 Exemplo

A melhor maneira de compreender um novo algoritmo é por meio de um exemplo resolvido. Então, vamos resolver um exemplo nesta seção. Considerando a rede na Figura 1 com a FDP das capacidades dos arcos na Tabela 1 e usando $L = (4, 3, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 3)$, encontraremos os dois CMDs mais confiáveis da rede para transmitir $d = 10$ unidades de fluxo do nó 1 ao nó 6 em um limite de tempo de $T = 12$ unidades.

**Passo 1.** Temos os seguintes CMs: $P_1 = \{a_1, a_3, a_5, a_7, a_9\}$, $P_2 = \{a_1, a_3, a_5, a_8\}$, $P_3 = \{a_1, a_3, a_6, a_7, a_8\}$, $P_4 = \{a_1, a_3, a_6, a_9\}$, $P_5 = \{a_1, a_4, a_5, a_6, a_9\}$, $P_6 = \{a_1, a_4, a_7, a_9\}$, $P_7 = \{a_1, a_4, a_8\}$, $P_8 = \{a_2, a_3, a_4, a_7, a_9\}$, $P_9 = \{a_2, a_3, a_4, a_8\}$, $P_{10} = \{a_2, a_5, a_7, a_9\}$, $P_{11} = \{a_2, a_5, a_8\}$, $P_{12} = \{a_2, a_6, a_7, a_8\}$, e $P_{13} = \{a_2, a_6, a_9\}$. Os $E_j$s não vazios são: $E_2 = \{P_{13}\}, E_4 = \{P_{11}\}, E_6 = \{P_{11}\}, E_7 = \{P_{10}, P_{13}\}, E_{10} = \{P_7\}, E_{11} = \{P_4, P_6\}, E_{13} = \{P_2, P_7\}$ e $I = (2, 4, 6, 7, 10, 11, 13)$. Temos $\gamma_2 = 4, \gamma_4 = 0, \gamma_6 = 0, \gamma_7 = 12, \gamma_{10} = 0, \gamma_{11} = 8, \gamma_{13} = 4$. E deixamos $i = 1$.

**Passo 2.** $1 < |I|$ e vamos ao Passo 3.

**Passo 3.** $j = 13$ e $10 > 4 + 4$ e vamos ao Passo 5.

**Passo 5.** Retiramos $P_{13}$ de $E_2$ e $P_2$ de $E_{13}$, $E_2 = \emptyset$ e $E_{13} = \{P_7\}$, i=2 e vamos ao Passo 2.

**Passo 2.** $2 < |I|$ e vamos ao Passo 3.

**Passo 3.** $j = 11$ e $10 > 8 + 0$ e vamos ao Passo 5.

$\vdots$

Finalmente, os dois CMs mais confiáveis da rede são determinados como $P_7$ e $P_{13}$.

# 5 Considerações Finais

Propusemos um algoritmo simples para determinar os dois CMDs mais confiáveis na rede para transmitir $d$ unidades de fluxo dentro de $T$ unidades de tempo. Demonstramos a correção do algoritmo e o ilustramos através de um exemplo de referência. Para trabalhos futuros, é possível estudar o problema de encontrar qualquer número dos CMDs mais confiáveis ou o caso de encontrar os dois ou mais CMs mais confiáveis, que não precisam ser necessariamente disjuntos.

# Agradecimentos

Os autores agradecem à FAPESP pelo suporte financeiro (bolsas 2023/13667-5 e 2024/06845-7).

# Referências

[1] P. C. Chang, D. H. Huang, Y. K. Lin e T. P. Nguyen. “Reliability and maintenance models for a time-related multi-state flow network via d-MC approach”. Em: **Reliability Engineering & System Safety** 216 (2021), p. 107962.

 

[2] Y. L. Chen e Y. H. Chin. "The quickest path problem". Em: **Computers & Operations Research** 17.2 (1990), pp. 153–161.

[3] M. El Khadiri, W. C. Yeh e H. Cancela. "An efficient factoring algorithm for the quickest path multi-state flow network reliability problem". Em: **Computers & Industrial Engineering** 179 (2023), p. 109221.

[4] M. Forghani-Elahabad. "3 The Disjoint Minimal Paths Reliability Problem". Em: **Operations Research**. CRC Press, 2022, pp. 35–66.

[5] M. Forghani-elahabad e O. M. Alsalami. "Using a Node–Child Matrix to Address the Quickest Path Problem in Multistate Flow Networks under Transmission Cost Constraints". Em: **Mathematics** 11.24 (2023), p. 4889.

[6] M. Forghani-elahabad e E. Francesquini. "An Improved Vectorization Algorithm to Solve the d-MP Problem". Em: **Trends in Computational and Applied Mathematics** 24.1 (2023), pp. 19–34.

[7] M. Forghani-elahabad e N. Mahdavi-Amiri. "A New Algorithm for Generating All Minimal Vectors for the $q$ SMPs Reliability Problem With Time and Budget Constraints". Em: **IEEE Transactions on Reliability** 65.2 (2015), pp. 828–842.

[8] M. Forghani-elahabad e N. Mahdavi-Amiri. "An efficient algorithm for the multi-state two separate minimal paths reliability problem with budget constraint". Em: **Reliability Engineering & System Safety** 142 (2015), pp. 472–481.

[9] M. Forghani-elahabad e W. C. Yeh. "An improved algorithm for reliability evaluation of flow networks". Em: **Reliability Engineering & System Safety** 221 (2022), p. 108371.

[10] Z. Hao, W. C. Yeh, Z. Liu e M. Forghani-elahabad. "General multi-state rework network and reliability algorithm". Em: **Reliability Engineering & System Safety** 203 (2020), p. 107048.

[11] D. H. Huang. "A network reliability algorithm for a stochastic flow network with non-conservation flow". Em: **Reliability Engineering & System Safety** 240 (2023), p. 109584.

[12] Y. K. Lin. "Extend the quickest path problem to the system reliability evaluation for a stochastic-flow network". Em: **Computers & Operations Research** 30.4 (2003), pp. 567–575.

[13] Y. F. Niu, J. H. Wei e X. Z. Xu. "Computing the Reliability of a Multistate Flow Network with Flow Loss Effect". Em: **IEEE Transactions on Reliability** (2023).

[14] Y. F. Niu e X. Z. Xu. "A new solution algorithm for the multistate minimal cut problem". Em: **IEEE Transactions on Reliability** 69.3 (2019), pp. 1064–1076.

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0356