Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Explorando a Interdisciplinaridade entre Probabilidade e Educação Financeira

Cleomar T. da Silva[1] Andres D. B. Sanchez[2] Denise de Siqueira[3]
DAMAT/UTFPR, Curitiba, Paraná

Resumo. Neste trabalho é abordada a interdisciplinaridade entre os conceitos de matemática básica, comumente ensinados no ensino médio e a Educação Financeira, em particular, considerando uma introdução aos conceitos da probabilidade e sua aplicação em situações inspiradas no mercado financeiro. Este trabalho é baseado em um dos capítulos da dissertação de mestrado profissional em Matemática (PROFMAT) do aluno Cleomar Taumaturgo da Silva [4].

Palavras-chave. Ensino de Probabilidade, Educação Financeira, Interdisciplinaridade

1 Introdução

A educação financeira foi incorporada pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [1] como um tema transversal a ser abordado em diversas disciplinas. No estado do Paraná, essa consideração levou à inclusão da disciplina de Educação Financeira na grade curricular do ensino médio em 2021. Essa disciplina visa capacitar os estudantes a desenvolverem uma vida financeira mais saudável e a desenvolver cidadãos mais conscientes em relação ao consumo. Entendendo a interdisciplinaridade como a interação entre diversas disciplinas e considerando a importância da Matemática como elemento central em abordagens interdisciplinares nas Ciências Exatas, Tecnologia e Engenharia [3], o presente trabalho propõe explorar a interdisciplinaridade entre a Matemática e a Educação Financeira. Em particular, buscamos que através da introdução de conceitos de probabilidade baseados em exemplos e situações inspiradas no mercado financeiro, seja possível, não apenas o desenvolvimento de habilidades específicas em ambas as disciplinas, mas também ilustrar esses conhecimentos de maneira prática e contextualizada.

Considerando que a interdisciplinaridade é um catalisador para a compreensão de conceitos nas áreas envolvidas, acreditamos que a nossa proposta pode contribuir para o entendimento dos conceitos matemáticos básicos de probabilidade proporcionando ao mesmo tempo, uma introdução a conceitos do mercado financeiro e a situações com potencial impacto na sua vida financeira.

O presente material está pensado como uma ferramenta de apoio, para educadores da área de matemática no ensino médio, que pretendem integrar aspectos da Educação Financeira na sua prática docente.

2 Alguns conceitos básicos de probabilidade

Seguindo a abordagem usual para a definição de probabilidade, usada por exemplo em [2], para determinar a probabilidade de um evento específico em um experimento aleatório, é preciso

[1] cleomartaumaturgosilva@gmail.com
[2] adsanchez@utfpr.edu.br
[3] denisesiqueira@utfpr.edu.br

considerar a razão entre o número de possíveis resultados correspondentes ao evento e o número total de casos possíveis do experimento.

Denotando por Ω o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento, um evento específico corresponderá a um subconjunto $A \subset \Omega$ e a probabilidade associada com tal evento será denotada por $P(A)$ e calculada como

$$P(A) = \frac{\text{n° de casos correspondentes ao evento } A}{\text{n° de casos possíveis}} = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)}.$$

Na teoria de probabilidade são fundamentais os conceitos de variável aleatória e de distribuição de probabilidade. Uma variável aleatória corresponde a uma variável que pode tomar resultados de forma aleatória. Por exemplo, o número de ligações recebidas por hora em uma pizzaria, o comprimento de cada folha de uma arvore ou o preço médio diário de um ativo financeiro.

Uma variável aleatória numérica pode ser discreta ou contínua, dependendo dos tipo de valores que pode assumir. Assim, uma variável aleatória é discreta se o conjunto de valores possíveis é finito ou enumerável e é contínua quando os valores que ela pode assumir podem ser representados como um intervalo na reta dos números reais.

Se X é uma variável aleatória discreta e k corresponde a um valor arbitrário entre os possíveis valores que X pode tomar, será usada a notação $P(X = k)$ para denotar a probabilidade de que X tome o valor k. Esta expressão geral é também denominada de distribuição de probabilidade da variável aleatória X.

3 Introdução à probabilidade através de um exemplo: Preço de um ativo

Nesta seção, consideramos alguns exemplos inspirados no desempenho de um ativo financeiro hipotético, para introduzir os conceitos básicos de probabilidade considerados na seção anterior. Mostraremos como a exploração aprofundada destes exemplos permitirá discutir, de forma natural, desde o conceito de espaço amostral e variável aleatória até o desenvolvimento de uma expressão geral para a distribuição de probabilidade, neste caso, a distribuição binomial.

Exemplo 3.1. *Suponha que o preço de um certo ativo se comporte da seguinte maneira: cada dia aumenta ou descresse* $R\$0.50$ *(mas nunca fica igual). Se o preço hoje for de* $R\$10.00$*, quais os preços possíveis em* 2 *dias,* 3 *dias ou* n *dias? Qual é o preço máximo possível?*

Pelas condições dadas, é claro que se o preço hoje for de $R\$10.00$, amanhã só pode ser $R\$10.50$ ou $R\$9.50$.

No segundo dia, partindo de $R\$\,9.50$ os possíveis preços podem ser de $R\$\,9.00$ ou $R\$\,10.00$, do mesmo modo, se o valor era de $R\$\,10.50$, agora os possíveis valores podem ser de $R\$\,10.00$ ou $R\$\,11.00$. Portanto, ao final do segundo dia os possíveis preços do ativo poderiam ser, $R\$\,9.00$, $R\$\,10.00$ ou $R\$\,11.00$.

Estes valores possíveis ao final do primeiro e do segundo dia, correspondem ao espaço amostral associado com as variáveis aleatórias *"preço do ativo após i dias"*, para $i = 1, 2$. Denotaremos o conjunto de preços possíveis em reais do ativo ao final do dia i por Ω_i. Assim tem-se que:

$$\Omega_1 = \{9.50, 10.50\}; \quad \Omega_2 = \{9.00, 10.00, 11.00\}.$$

É possível visualizar estes preços com um diagrama conhecido como *diagrama de árvore* representado na Figura 1. Seguindo os preços obtidos ao final do segundo dia, se o valor foi de $R\$\,9.00$, os novos valores podem ser de $R\$\,9.50$ ou $R\$\,8.50$, com o preço de $R\$\,10.00$ pode-se obter

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0395

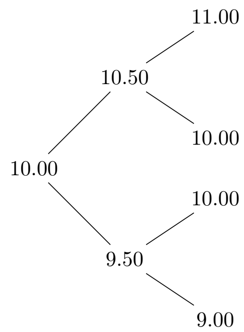


Figura 1: Diagrama de árvore para o preço após dois dias. Fonte: Autores.

$R\$\,10.50$ ou $R\$\,9.50$ e se o valor final no segundo dia foi de $R\$\,11.00$ os possíveis valores podem ser de $R\$\,11.50$ ou $R\$\,10.50$, ou seja, $\Omega_3 = \{8.50, 9.50, 10.50, 11.50\}$.

Todas as possibilidades de preço para o terceiro dia pode ser visualizadas no diagrama de árvore na Figura 2.

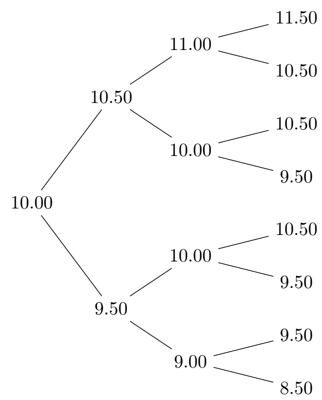


Figura 2: Diagrama de árvore para o preço após três dias. Fonte: Autores.

Observe que, pelas hipóteses do exemplo, para o segundo dia os preços obtidos podem ser escritos como um conjunto de números consecutivos entre 9 e 11, e como consequência, para o terceiro dia, os preços são todos fracionários com parte decimal igual a 0.50, com diferenças de uma unidade entre si variando de 8.50 a 11.50. Pode-se observar também que o valor máximo do preço do ativo no dia n é de $10 + 0.50 \cdot n$ e o valor mínimo de $10 - 0.5 \cdot n$. Assim é possível estabelecer a seguinte expressão para o conjunto Ω_n, para $n = 2, 3, \ldots, 20$.

$$\Omega_n = \begin{cases} \{10 + i\} \cup \{10 - i\}, i = 0, \cdots, n-1 & \text{se } n \text{ par,} \\ \{10 + 0.50(2i+1)\} \cup \{10 - 0.50(2i+1)\}, i = 0, \cdots, n-1 & \text{se } n \text{ ímpar.} \end{cases}$$

Note que a partir do dia 21 a expressão anterior não seria válida pois não é possível que uma ação atinja um preço negativo. Ainda com relação ao Exemplo 3.1, é possível perguntar-se além dos preços possíveis, qual é o mais provável e, em geral, qual é a probabilidade de cada preço. Estas questões estão relacionadas com o conceito de distribuição de probabilidade e podem ser exploradas como ilustra o seguinte exemplo.

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0395

Exemplo 3.2. *Considere o ativo no Exemplo 3.1 e suponha que as probabilidades do preço aumentar ou cair em cada dia são iguais, ou seja, cada uma é igual* 50%. *Quais são as probabilidades para cada possível preço do ativo em 3 dias, 4 dias ou 5 dias?*

Considere inicialmente 2 dias, neste caso o espaço amostral (conjunto de valores possíveis para o preço do ativo) é $\Omega_2 = \{9, 10, 11\}$. Observando o diagrama de árvore na Figura 1, o valor $R\$\,9.00$ pode ocorrer 1 dentre as 4 possibilidades, o valor $R\$\,10.00$ poderá ocorrer 2 entre as 4 possibilidades e por fim $R\$\,11.00$ terá ocorrência de 1 em 4. A probabilidade do preço do ativo ser k ao final do segundo dia será representado por $P(x = k)$, com $k \in \{9, 10, 11\}$ logo temos as seguintes probabilidades organizadas na Tabela 1 e representadas na Figura 3 (a).

Tabela 1: Distribuição de probabilidade após 2 dias.

k	9	10	11
$P(x = k)$	0.25	0.50	0.25

Considere agora os possíveis valores após 3 dias, neste caso o espaço amostral será $\Omega_3 = \{8.50, 9.50, 10.50, 11.50\}$. Podemos observar no diagrama de árvore 2, a ocorrência dos valores entre as 8 possibilidades, o valor de $R\$\,8.50$ ocorre 1 vez, $R\$\,9.50$ acontece 3 vezes, $R\$\,10.50$ também se repete 3 vezes e o preço de $R\$\,11.50$ pode ocorrer 1 vez. Desta forma a distribuição de probabilidade, para cada evento, pode ser resumida na Tabela 2 e ilustrada na Figura 3 (b).

Tabela 2: Valores para a distribuição de probabilidade do ativo após 3 dias.

k	8.50	9.50	10.50	11.50
$P(X = k)$	0.125	0.375	0.375	0.125

Considerando os possíveis valores após 4 dias, tem-se que $\Omega_4 = \{8.00, 9.00, 10.00, 11.00, 12.00\}$. Sendo assim, podemos obter a ocorrência de cada um desses valores dentre as 16 possibilidades resumida na Tabela 3 e representada na Figura 3 (c).

Tabela 3: Tabela de distribuição de probabilidade após 4 dias

k	8.00	9.00	10.00	11.00	12.00
$P(X = k)$	0.0625	0.25	0.375	0.25	0.0625

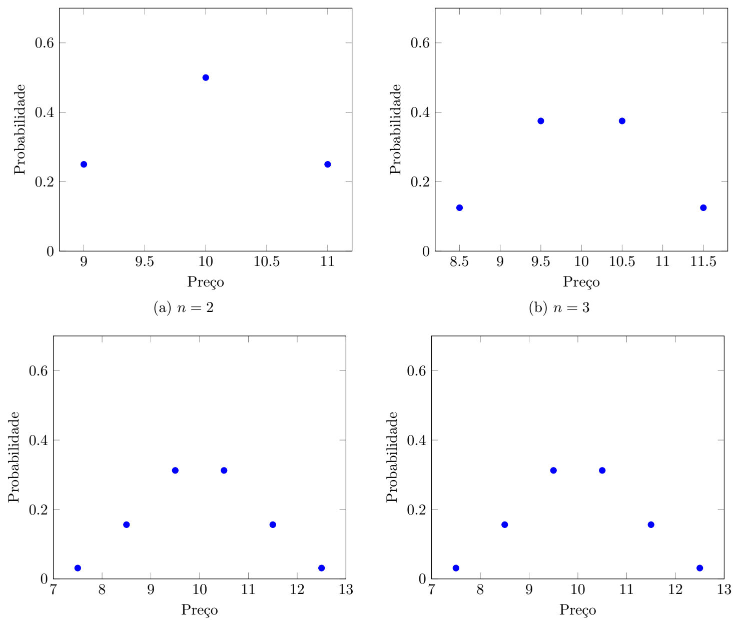
Finalmente, considerando os possíveis valores após 5 dias, tem-se que o espaço amostral é dado por $\Omega_5 = \{7.50, 8.50, 9.50, 10.50, 11.50, 12.50\}$, cuja distribuição de probabilidade é apresentada na Tabela 4 e seu gráfico na Figura 3 (d).

Tabela 4: Distribuição de probabilidade após 5 dias.

k	7.50	8.50	9.50	10.50	11.50	12.50
$P(X = k)$	0.03125	0.15625	0.3125	0.3125	0.15625	0.03125

4 Construindo uma distribuição de probabilidade

O processo descrito na seção anterior pode ser generalizado para o caso geral de n dias e vai permitir de fato uma dedução natural distribuição de probabilidades.



(a) $n = 2$ (b) $n = 3$ (c) $n = 4$ (d) $n = 5$

Figura 3: Distribuição de probabilidade do preço da ação após $n \in \{2, 3, 4, 5\}$ dias. Fonte: Autores.

O aumento do ativo de R\$0.50 será considerado sucesso e será representado por S. A perda será considerada fracasso e denotada por F. Além disso, a probabilidade de sucesso será representada por p e de fracasso, será q. Assim, ao fim do primeiro dia de observação teremos apenas duas possibilidades: S ou F, com probabilidades de ocorrência p e q, respectivamente. Com isso, ao final do primeiro dia, o preço de $R\$9.50$ ocorre com 1 fracasso ou 0 sucesso e o preço de $R\$10.50$ ocorre com 1 sucesso. Por tanto o espaço amostral pode ser escrito em relação ao número de sucessos como $\Omega_1 = \{0, 1\}$.

Note que se a probabilidade de sucesso é p logo, a probabilidade de fracasso pode ser escrita como $q = 1 - p$, pois são complementares. Observe que estes valores correspondem à imagem da função de probabilidade associado ao espaço amostral $\Omega_1 = \{0, 1\}$, ou seja, $P(\Omega_1) = \{p, 1 - p\}$.

Ao final do segundo dia o preço de $R\$9.00$ foi obtido com dois fracassos, representado por (FF), o preço de $R\$10.00$ foi obtido com uma alta e uma queda ou vice-versa, isto é, sucesso seguido de fracasso ou fracasso seguido de sucesso, representado por (SF) ou (FS) e o valor de $R\$11.00$ foi obtido com dois sucessos seguidos, denotado por (SS). Perceba que no segundo dia as probabilidades de sucesso e fracasso permanecem as mesmas. Dessa forma, a probabilidade de ocorrer dois fracassos (FF) será igual a $q \cdot q = q^2$, a probabilidade de ocorrer sucesso e fracasso (SF) será de $p \cdot q$, a probabilidade de ocorrer fracasso e sucesso (FS) será de $q \cdot p$ e a probabilidade de ocorrer dois sucessos (SS) será de $p \cdot p = p^2$. O diagrama da Figura 4 pode exemplificar este cenário. Observe ainda que para o caso de (FF) o número de sucessos é igual a 0, os casos (FS) ou (SF) tem 1 sucesso e o caso (SS) representa 2 sucessos. Na Figura 4 consideramos as probabilidades p^2, pq, qp e q^2. Porém $qp = pq$, logo a ocorrência dessa probabilidade é de $2pq$, assim como feito no primeiro dia $q = 1 - p$. Os dados obtidos estão resumidos na Tabela 5.

Observe que para $k = 0$ sucesso, o expoente de p é 0 e $q = 1 - p$ tem expoente 2, para $k = 1$ sucesso, o expoente de p é 1 e de $(1 - p)$ também é 1, e para $k = 2$ sucessos o expoente de p é 2 e de $(1 - p)$ é 0. Os valores de $P(X = k)$ da Tabela 5 representam a imagem da função de probabilidade associado ao espaço amostral $\Omega_2 = \{FF, SF, FS, SS\}$, ou seja, $P(\Omega_2) = \{(1 - p)^2, 2(1 - p)p, p^2\}$.

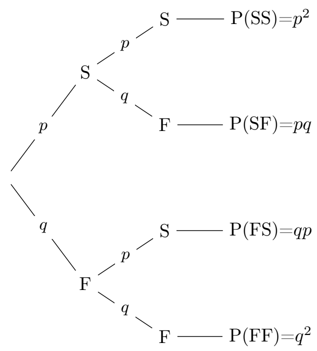


Figura 4: Diagrama de árvore para a probabilidade após dois dias. Fonte: Autores.

Tabela 5: Função de Probabilidade para Ω_2

Preço (Real)	$R\$9.00$	$R\$10.00$	$R\$11.00$
Eventos	(FF)	(SF) ou (FS)	(SS)
$k = n^\circ$ de sucessos	0	1	2
$P(X = k)$	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	p^2

No espaço amostral dos preços do ativo de $\Omega_3 = \{8.50, 9.50, 10.50, 11.50\}$, o valor de 8.50 representa o evento de três fracassos seguidos, isto é FFF, o valor de 9.50 pode ocorrer com SFF, FSF ou FFS, isto é em 3 dias obter apenas 1 sucesso. O preço de 10.50 ocorre com 2 sucessos em 3 dias, logo podem ser: SSF, SFS ou FSS. Podemos representar essas probabilidades com respectivos preços e número de sucessos com a Tabela 6.

Tabela 6: Probabilidades para Ω_3

Preço em Real	$R\$8.50$	$R\$9.50$	$R\$10.50$	$R\$11.50$
Eventos	(FFF)	(FFS), (FSF), (SFF)	(SSF), (FSS), (SFS)	(SSS)
$k = n^\circ$ de sucessos	0	1	2	3
$P(X = k)$	$(1-p)^3$	$3p(1-p)^2$	$3p^2(1-p)$	p^3

Observe que para $k = 0$ os expoentes de p e $(1-p)$ são respectivamente 0 e 3, para $k = 1$ os expoentes de p e $(1-p)$ serão 1 e 2, quando $k = 2$ o expoente de p é 2 e de $(1-p)$ será 1 e por fim para $k = 3$ o expoente de p será 3 e o expoente de $(1-p)$ é 0. Os valores da Tabela 6 representam a imagem da função de probabilidade associada ao espaço amostral de Ω_3, isto é

$$P(\Omega_3) = \{(1-p)^3, 3p(1-p)^2, 3p^2(1-p), p^3\}.$$

Em geral, para n dias e k sucessos, teremos que o expoente de p será k, obtendo p^k e o expoente de $(1-p)$ será $n-k$ e os coeficientes dos elementos de $P(\Omega_n)$ consistem do número de combinações de "n" termos, tomados k a k, sendo "k" a quantidade de sucessos desejados ao fim de cada "n" dias, representado por $\binom{n}{k}$. Portanto, a função de distribuição de probabilidade pode ser definida como:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}. \tag{1}$$

Portanto, que é possível obter as probabilidades para o ativo em qualquer tempo n. Por exemplo, se $n = 2$, ou seja, no segundo dia as probabilidades são: inicialmente, nenhum sucesso, ou seja, temos (FF), podemos ter 1 sucesso (FS) e (SF) e também dois sucessos, (SS). Neste caso as probabilidades são:

1. Probabilidade de nenhum sucesso em 2 dias.

$$P(X=0) = \binom{2}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^2 = 1 \cdot 1 \cdot (1-p)^2 = (1-p)^2 = 0.25 = 25\%.$$

2. Probabilidade de 1 sucesso em 2 dias.

$$P(X=1) = \binom{2}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^1 = 2 \cdot p \cdot (1-p) = (1-p) = 0.50 = 50\%.$$

3. Probabilidade de 2 sucessos em 2 dias.

$$P(X=2) = \binom{2}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^0 = 1 \cdot p^2 \cdot 1 = p^2 = 0.25 = 25\%.$$

A distribuição deduzida em (1) é conhecida como *Distribuição Binomial* e tem extensas aplicações e generalizações que podem ser aprofundadas, por exemplo, em [2].

5 Considerações Finais

Este trabalho considerou uma abordagem prática, através de exemplos inspirados no mercado financeiro, para introduzir o estudo de probabilidade. Passo a passo conseguimos explorar o exemplo, ilustrando os conceitos de variável aleatória, espaço amostral até culminar, de forma construtiva com a distribuição binomial. Acreditamos que ao conectar diretamente os princípios matemáticos aos eventos financeiros do mundo real, oferecemos aos alunos não apenas um conhecimento teórico, mas também uma visão prática e aplicada da matemática no contexto do mundo real.

Agradecimentos

Os autores agradecem a Universidade Tecnológica Federal do Paraná pelo apoio. A autora Denise de Siqueira agradece à Fundação Araucária pelo apoio financeiro por meio da chamada Edital PROPPG 22/2023.

Referências

[1] BRASIL. **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica**. Online. Acessado em 10/02/2021, `http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=13448-diretrizes-curiculares-nacionais-2013-pdf&Itemid=30192`.

[2] W.O. Bussab e P.A. Morettin. **Estatística Básica**. 6a. Edição. Editora Saraiva, 2010. ISBN: 9788502081772.

[3] K. Maass, V. Geiger, M. R. Ariza e M. Goos. "The role of mathematics in interdisciplinary STEM education". Em: **Zdm** (2019), pp. 869–884. DOI: `https://doi.org/10.1007/s11858-019-01100-5`.

[4] C. T. Silva. "Uma exploração da teoria de probabilidade aplicada em finanças". Dissertação de mestrado. UTFPR-CT, 2022.

