Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Uma Nova Condição de Qualificação para Controle Ótimo Baseada em Condições de Otimalidade Sequenciais

Rodrigo B. Moreira[1] Valeriano A. de Oliveira[2]
Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Câmpus de São José do Rio Preto, SP

Resumo. As condições de otimalidade sequenciais fornecidas pelo princípio do máximo fraco assintótico destacam-se dos trabalhos presentes na literatura, pois podem ser verificadas, por exemplo, através de uma versão adequada do método de Lagrangiano aumentado, ou seja, são ferramentas teóricas que podem ser aplicadas de forma prática para a escolha de candidatos à soluções de problemas de controle ótimo. Neste trabalho, estudamos condições que, quando satisfeitas, filtram esse conjunto de candidatos a solução com a mesma precisão do princípio do máximo. Como consequência obtemos uma nova condição de qualificação.

Palavras-chave. Condições de Qualificação, Controle Ótimo, Método de Lagrangiano Aumentado, Princípio do Máximo Fraco Assintótico, Restrições Mistas

1 Introdução

O problema de controle ótimo estudado no presente trabalho é dado por:

$$\begin{array}{l} \text{minimizar } \ell(x(0),x(1)) \\ \text{sobre } (x,u) \in W_n^{1,1}([0,1];\mathbb{R}^n) \times L^\infty([0,1];\mathbb{R}^m) \text{ satisfazendo} \\ \qquad \dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)) \text{ q.t.p. em } [0,1], \\ \qquad g(t,x(t),u(t)) \le 0 \qquad \text{q.t.p. em } [0,1], \\ \qquad (x(0),x(1)) \in C, \end{array} \tag{P}$$

em que $l : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(f,g) : [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_g}$ são funções dadas e $C \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

É bem estabelecido na literatura que o princípio do máximo geralmente não é válido para (P), como visto em [8]. Sua validade depende da imposição de certas hipóteses sobre as restrições mistas. Essas hipóteses são comumente conhecidas como *Constraint Qualifications* (CQ) que, em português, são referidas como condições de qualificação. Neste trabalho, com base em estudos desenvolvidos no contexto da programação não linear [1] (caso de dimensão finita) e [3] (caso de dimensão infinita), propomos uma nova condição de qualificação para problemas na forma de (P).

Ao longo deste trabalho, denotamos convergência forte e fraca por $\to$ e $\rightharpoonup$, respectivamente. Utilizamos a notação L_l^p, com $1 \le p \le \infty$, para denotar os tradicionais espaços $L^p([0,1];\mathbb{R}^l)$. A notação $W_n^{1,1}$ refere-se ao espaço das funções absolutamente contínuas $x : [0,1] \to \mathbb{R}^n$. A função Hamiltoniana $\mathcal{H} : [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_g} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ associada ao Problema (P) é definida como $\mathcal{H}(t,x,p,r,u) := p \cdot f(t,x,u) + r \cdot g(t,x,u)$. Além disso, recordamos que um processo é representado por um par (x,u), onde $u \in L_m^\infty$ é o controle e $x \in W_n^{1,1}$ é o arco (ou estado) que satisfazem $\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t))$ em quase todo ponto em $[0,1]$, vide [13, p. 202]. Um processo admissível

[1]rodrigo.barbosa@unesp.br
[2]valeriano.oliveira@unesp.br

$(\bar{x}, \bar{u})$ para (P), isto é, um processo que satisfaz todas as restrições de (P), recebe o nome de mínimo local fraco de (P) se existir um $\delta > 0$ tal que $\ell(\bar{x}(0), \bar{x}(1)) \leq \ell(x(0), x(1))$ para todos os processos admissíveis (x, u), tais que $(x(t), u(t)) \in \Omega_\delta(t) := \{(y, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : |(y, v) - (\bar{x}(t), \bar{u}(t))| \leq \delta\}$ para quase todo ponto em $[0, 1]$.

Em [11], Moreira e de Oliveira apresentam as definições de sequências e processos AWMP. Baseados nelas e realizando alguns ajustes de notação, podemos apresentar as seguintes definições.

Definição 1.1 (Sequências AWMP). *Uma sequência* $\{(x^k, u^k, p^k, r^k, \lambda^k)\} \subset W_n^{1,1} \times L_m^\infty \times W_n^{1,1} \times L_{m_g}^1 \times [0, +\infty)$ *é chamada de sequência WMP*[3] *assintótica (sequência AWMP) se existirem sequências* $\{(\varepsilon^k, \eta^k)\} \subset L_n^1 \times L_m^1$, $\{\nu_j^k\} \subset L_1^1$, $j = 1, \ldots, m_g$, *e* $\{(\vartheta^k, \sigma^k)\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *com* $\varepsilon^k \rightharpoonup 0$ *em* L_n^1, $\eta^k \rightharpoonup 0$ *em* L_m^1, $\nu_j^k(t) \to 0$ *para* $j = 1, \ldots, m_g$ *e quase todo ponto em* $[0, 1]$, $\vartheta^k \to 0$ *e* $\sigma^k \to 0$ *tais que, para cada* $k \in \mathbb{N}$ *e quase todo ponto em* $[0, 1]$,

(i) $\lambda^k + \|p^k\|_{L^\infty} = 1$;

(ii) $(-\dot{p}^k(t), 0) - (\varepsilon^k(t), \eta^k(t)) \in \operatorname{co} \partial_{x,u} \mathcal{H}(t, x^k(t), p^k(t), r^k(t), u^k(t))$;

(iii) $r_j^k(t)[g_j(t, x^k(t), u^k(t)) - \nu_j^k(t)] = 0$ *e* $r_j^k(t) \leq 0, \quad j = 1, \ldots, m_g$;

(iv) $(p^k(0), -p^k(1)) - (\vartheta^k, \sigma^k) \in \lambda^k \partial \ell(x^k(0), x^k(1)) + \mathcal{N}_C(x^k(0), x^k(1))$;

em que $\partial\Phi$ *e* $\mathcal{N}_C(x^k(0), x^k(1))$ *são a subdiferencial limite de* Φ *(*$\Phi = \mathcal{H}$ *e* $\Phi = \ell$*) e o cone normal limite a* C *em* $(x^k(0), x^k(1))$ *[13, Definições 4.3.1 e 4.2.3], respectivamente.*

Definição 1.2 (Processos AWMP). *Seja* $(\bar{x}, \bar{u})$ *um processo admissível do Problema (P). Chamamos* $(\bar{x}, \bar{u})$ *de um processo WMP assintótico (processo AWMP) se existir uma sequência AWMP* $\{(x^k, u^k, p^k, r^k, \lambda^k)\}$ *tal que* $x^k \to \bar{x}$ *e* $u^k \to \bar{u}$, *ambas uniformemente.*

Tomando $\delta > 0$ e um processo de referência $(\bar{x}, \bar{u})$, baseados em [7], vamos considerar que:

(H) ℓ é localmente Lipschitz em uma vizinhança de $(\bar{x}(0), \bar{x}(1))$; $|f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))|$ e $|g(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))|$ são integráveis em $[0, 1]$; para cada $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, a função $t \mapsto (f(t, x, u), g(t, x, u))$ é Lebesgue mensurável; e existe uma função $L \in L^1([0, T]; \mathbb{R})$ tal que para $\phi = f$ e $\phi = g$, $|\phi(t, x, u) - \phi(t, y, w)| \leq L(t)|(x, u) - (y, w)|$ para todo $(x, u), (y, w) \in \Omega_\delta(t)$ e q.t.p. em $[0, 1]$.

(CC) Defina $g^+(t, x, u) := \max\{0, g_1(t, x, u), \ldots, g_{m_g}(t, x, u)\}$. Os conjuntos $\{(f(t, x, u), g^+(t, x, u) + s) : |u - \bar{u}(t)| \leq \delta, s \geq 0\}$ são convexos para todo $|x - \bar{x}(t)| \leq \delta$ e q.t.p. em $[0, 1]$.

Usando as mesmas ideias da demonstração do Teorema 1 de [11], podemos demonstrar o Teorema 1.1, enunciado adiante, o qual assegura que todo mínimo local fraco de (P) é também um processo AWMP, ou seja, as Condições AWMP, dadas por (i)-(iv) na Definição 1.1, são genuínas condições necessárias de otimalidade.

Teorema 1.1 (Princípio do Máximo Fraco Assintótico). *Seja* $(\bar{x}, \bar{u})$ *um mínimo local fraco de (P). Se, para algum* $\delta > 0$, *as Hipóteses (H) e (CC) valem, então* $(\bar{x}, \bar{u})$ *é um processo AWMP.*

A versão do princípio do máximo que iremos nos referir como "clássica" é dada pelo Teorema 1.2, enunciado logo abaixo. Tal resultado pode ser consultado, por exemplo, em [7, Teorema 1].

Teorema 1.2 (Princípio do Máximo Fraco clássico). *Seja* $(\bar{x}, \bar{u})$ *um mínimo local fraco de (P). Suponha que alguma condição de qualificação seja satisfeita. Então existem* $\lambda \in [0, +\infty)$, $p \in W_n^{1,1}$ *e* $r \in L_{m_g}^1$ *tais que, para quase todo ponto em* $[0, 1]$,

(i) $\lambda + \|p\|_{L_n^\infty} \neq 0$;

(ii) $(-\dot{p}(t), 0) \in \operatorname{co} \partial_{x,u} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), r(t), \bar{u}(t))$;

(iii) $r(t) \cdot g(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = 0$ *e* $\quad r(t) \leq 0$;

(iv) $(p(0), -p(1)) \in \lambda \partial \ell(\bar{x}(0), \bar{x}(1)) + \mathcal{N}_C(\bar{x}(0), \bar{x}(1))$.

[3] WMP é a sigla para *Weak Maximum Principle*.

2 Uma Nova Condição de Qualificação

Nesta seção, investigamos sob qual cenário as condições de otimalidade AWMP implicam no princípio do máximo fraco clássico (Teorema 1.2). Para esta investigação, nos inspiramos em algumas ideias exploradas no contexto da programação não linear, mais especificamente, no caso de dimensão finita para problemas suaves, na condição *Cone Continuity Property* (CCP) [1], no caso de dimensão finita para problemas não suaves, na condição *Asymptotically Mordukhovich-regularity* (AM-regularidade) [10] e, no caso de dimensão infinita para problemas suaves, na *AKKT-regularity* (AKKT-regularidade) [3]. Através da inspiração obtida, propomos uma nova condição de regularidade para (P), baseada nas as condições AWMP, denominada AWMP-regularidade (ou *AWMP-regularity*). Esta nova condição atua como uma condição de qualificação e assegura a validade do princípio do máximo fraco clássico.

Motivados pela definição das condições AWMP, para cada $x \in W_n^{1,1}$, $u \in L_m^\infty$ e $\nu \in L_{m_g}^1$, vamos considerar os seguintes conjuntos:

$$\mathcal{M}_1(x,u) := \left\{ \begin{array}{l|l} (\varphi,\psi,\gamma,\xi) & \text{para quase todo ponto em } [0,1], \\ \in L_n^1 \times L_m^1 & (\varphi(t),\psi(t)) \in \operatorname{co}\partial_{x,u}(p(t)\cdot f(t,x(t),u(t))) - \{(-\dot{p}(t),0)\}, \\ \quad \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & (\gamma,\xi) \in \lambda\partial\ell(x(0),x(1)) - \{(p(0),-p(1))\}, \\ & (\lambda,p) \in [0,+\infty) \times W_n^{1,1} \text{ e } \lambda + \|p\|_{L_n^\infty} \neq 0 \end{array} \right\} \tag{1}$$

e

$$\mathcal{M}_2(x,u,\nu) := \left\{ \begin{array}{l|l} & \text{para quase todo ponto em } [0,1], \\ & (\varphi(t),\psi(t)) = \sum_{j=1}^{m_g} r_j(t)\nabla_{x,u}g_j(t,x(t),u(t)), \\ (\varphi,\psi,\gamma,\xi) & r \in L_{m_g}^1, r_j(t) \leq 0,\ j=1,\ldots,m, \\ \in L_n^1 \times L_m^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & r_j(t)[g_j(t,x(t),u(t)) - \nu_j(t)] = 0,\ j=1,\ldots,m_g, \\ & (\gamma,\xi) \in \mathcal{N}_C(x(0),x(1)) \end{array} \right\}. \tag{2}$$

O lema apresentado adiante estabelece uma relação entre tais conjuntos e o princípio do máximo fraco clássico (Teorema 1.2).

Lema 2.1. *Seja $(\bar{x},\bar{u})$ um processo factível para (P). Se*

$$\mathcal{M}_1(\bar{x},\bar{u}) \cap (-\mathcal{M}_2(\bar{x},\bar{u},0)) \neq \varnothing, \tag{3}$$

então as condições do princípio do máximo fraco clássico são satisfeitas em $(\bar{x},\bar{u})$.

Demonstração. Seja $(\varphi,\psi,\gamma,\xi) \in \mathcal{M}_1(\bar{x},\bar{u}) \cap (-\mathcal{M}_2(\bar{x},\bar{u},0))$. Por definição, $(\varphi,\psi,\gamma,\xi) \in L_n^1 \times L_m^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e existe $(\lambda,p,r) \in [0,+\infty) \times W_n^{1,1} \times L_{m_g}^1$ tal que, para quase todo ponto em $[0,1]$,

$$(\varphi(t),\psi(t)) \in \operatorname{co}\partial_{x,u}(p(t)\cdot f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))) - \{(-\dot{p}(t),0)\}, \tag{4}$$

$$(\varphi(t),\psi(t)) = -\sum_{j=1}^{m_g} r_j(t)\nabla_{x,u}g_j(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)), \tag{5}$$

$$r_j(t)g_j(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)) = 0 \quad \text{e} \quad r_j(t) \leq 0,\ j=1,\ldots,m_g, \tag{6}$$

$$(\gamma,\xi) \in \lambda\partial\ell(\bar{x}(0),\bar{x}(1)) - (p(0),-p(1)), \tag{7}$$

$$-(\gamma,\xi) \in \mathcal{N}_C(\bar{x}(0),\bar{x}(1)), \tag{8}$$

$$\lambda + \|p\|_{L_n^\infty} \neq 0. \tag{9}$$

Por (4) e (5),

$$\begin{aligned}(-\dot{p}(t),0) &\in \operatorname{co}\partial_{x,u}(p(t)\cdot f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))) + \sum_{j=1}^{m_g} r_j(t)\nabla_{x,u}g_j(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)) \\ &= \operatorname{co}\partial_{x,u}\mathcal{H}(t,\bar{x}(t),p(t),r(t),\bar{u}(t))\end{aligned} \tag{10}$$

em quase todo ponto em $[0,1]$. Além disso, de (7), (8) e (9),

$$(p(0), -p(1)) \in \lambda\partial\ell(\bar{x}(0), \bar{x}(1)) - \{(\gamma, \xi)\} \subset \lambda\partial\ell(\bar{x}(0), \bar{x}(1)) + \mathcal{N}_C(\bar{x}(0), \bar{x}(1)), \tag{11}$$

com $\lambda + \|p\|_{L_n^\infty} \neq 0$. Portanto, por (6), concluímos a demonstração. $\square$

O Lema 2.2, enunciado adiante, garante que, sob algumas hipóteses, podemos representar as condições AWMP de uma forma alternativa que envolve o limite externo/superior fraco do tipo Painlevé-Kuratowski da multifunção $\mathcal{M}_2 : W_n^{1,1} \times L_m^\infty \times L_{m_g}^1 \rightsquigarrow L_n^1 \times L_m^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dado por

$$\underset{\substack{x\to\bar{x},u\to\bar{u}\\ \nu\to 0}}{\text{w-}\limsup}\, \mathcal{M}_2(x,u,\nu) :=$$
$$\left\{ \begin{array}{l|l} & \exists\, \{(x^k, u^k, \nu^k)\} \subset W_n^{1,1} \times L_m^\infty \times L_{m_g}^1 : \\ & x^k \to \bar{x} \text{ e } u^k \to \bar{u} \text{ ambas uniformemente}, \\ (\varphi, \psi, \gamma, \xi) & \nu_j^k(t) \to 0 \;\text{ q.t.p. em } [0,1],\; j = 1, \ldots, m_g, \\ \in L_n^1 \times L_m^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & (\varphi^k, \psi^k) \rightharpoonup (\varphi, \psi) \text{ em } L_n^1 \times L_m^1, \\ & (\gamma^k, \xi^k) \to (\gamma, \xi), \\ & (\varphi^k, \psi^k, \gamma^k, \xi^k) \in \mathcal{M}_2(x^k, u^k, \nu^k) \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \end{array} \right\}. \tag{12}$$

Lema 2.2. *Seja* $(\bar{x}, \bar{u})$ *um processo AWMP para (P), em que valem as Hipóteses (H) e (CC) e a sequência AWMP associada seja dada por* $\{(x^k, u^k, p^k, r^k, \lambda_k)\} \subset W_n^{1,1} \times L_m^\infty \times W_n^{1,1} \times L_{m_g}^1 \times [0, +\infty)$, *com* $\{(\varepsilon^k, \eta^k)\} \subset L_n^1 \times L_m^1$ *como na Definição 1.1. Suponha que*

(H1) existam funções integráveis k_ε *e* k_η *tais que* $|\varepsilon^k(t)| \leq k_\varepsilon(t)$ *e* $|\eta^k(t)| \leq k_\eta(t)$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$ *e quase todo ponto em* $[0,1]$*;*

(H2) exista uma função integrável k_φ *tal que*

$$\left| \sum_{j=1}^{m_g} r_j^k(t) \nabla_x g_j(t, x^k(t), u^k(t)) \right| \leq k_\varphi(t) \tag{13}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ *e quase todo ponto em* $[0,1]$.

Então

$$\mathcal{M}_1(\bar{x}, \bar{u}) \cap \left(-\underset{\substack{x\to\bar{x},u\to\bar{u}\\ \nu\to 0}}{\text{w-}\limsup}\, \mathcal{M}_2(x,u,\nu) \right) \neq \varnothing. \tag{14}$$

Demonstração. Como, por hipótese, $(\bar{x}, \bar{u})$ é um processo AWMP para (P), então, por definição, existem sequências $\{(x^k, u^k, p^k, r^k, \lambda_k)\} \subset W_n^{1,1} \times L_m^\infty \times W_n^{1,1} \times L_{m_g}^1 \times [0, +\infty)$, $\{(\varepsilon^k, \eta^k)\} \subset L_n^1 \times L_m^1$, $\{\nu^k\} \subset L_{m_g}^1$ e $\{(\vartheta^k, \sigma^k)\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tais que, para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[0,1]$,

$$\lambda_k + \|p^k\|_{L_n^\infty} = 1, \tag{15}$$
$$(-\dot{p}^k(t), 0) - (\varepsilon^k(t), \eta^k(t)) \in \operatorname{co} \partial_{x,u} \mathcal{H}(t, x^k(t), p^k(t), r^k(t), u^k(t)), \tag{16}$$
$$r_j^k(t)[g_j(t, x^k(t), u^k(t)) - \nu_j^k(t)] = 0 \quad \text{e} \quad r_j^k(t) \leq 0, \quad j = 1, \ldots, m_g, \tag{17}$$
$$(p^k(0), -p^k(1)) - (\vartheta^k, \sigma^k) \in \lambda_k \partial\ell(x^k(0), x^k(1)) + \mathcal{N}_C(x^k(0), x^k(1)), \tag{18}$$

em que $\varepsilon^k \rightharpoonup 0$ em L_n^1, $\eta^k \rightharpoonup 0$ em L_m^1, $\nu_j^k(t) \to 0$ quase todo ponto em $[0,1]$, com $j = 1, \ldots, m_g$, $\vartheta^k \to 0$, $\sigma^k \to 0$, $x^k \to \bar{x}$ e $u^k \to \bar{u}$ ambas uniformemente.

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0502

De (18), para cada $k \in \mathbb{N}$, existe algum $(\pi_1^k, \pi_2^k) \in \mathcal{N}_C(x^k(0), x^k(1))$ tal que

$$(p^k(0), -p^k(1)) - (\vartheta^k, \sigma^k) \in \lambda_k \partial \ell(x^k(0), x^k(1)) + \{(\pi_1^k, \pi_2^k)\} \tag{19}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Então, para todo $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[0,1]$, definimos

$$(\varphi^k(t), \psi^k(t), \gamma^k, \xi^k) := \left(-\sum_{j=1}^{m_g} r_j^k(t) \nabla_{x,u} g_j(t, x^k(t), u^k(t)), 0, 0 \right) + (0, 0, -\pi_1^k, -\pi_2^k). \tag{20}$$

Logo, usando (17) e (19), podemos concluir que $(\varphi^k, \psi^k, \gamma^k, \xi^k) \in -\mathcal{M}_2(x^k, u^k, \nu^k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Pela Hipótese (H2), existe uma função integrável k_φ tal que $|\varphi^k(t)| \leq k_\varphi(t)$ para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[0,1]$. Portanto, pelo Teorema de Dunford-Pettis [13, Teorema 2.5.1, p. 87], por meio da extração de uma subsequência (não renomearemos), podemos concluir que $\varphi^k \rightharpoonup \varphi$ para alguma função $\varphi \in L_n^1$.

Por (15), $\lambda_k \leq 1$ e $|p^k(1)| \leq 1$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Assim, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass [9, Teorema 5, p. 17], podemos extrair subsequências (não renomearemos) e garantir que $\lambda_k \to \lambda$ e $p^k(1) \to p_1$, com $(\lambda, p_1) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$.

De (16) e (18), para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[0,1]$,

$$(\varphi^k(t), \psi^k(t)) - (\varepsilon^k(t), \eta^k(t)) \in \operatorname{co} \partial_{x,u}(p^k(t) \cdot f(t, x^k(t), u^k(t))) - \{(-\dot{p}^k(t), 0)\} \tag{21}$$

e

$$(\gamma^k, \xi^k) - (\vartheta^k, \sigma^k) \in \lambda_k \partial \ell(x^k(0), x^k(1)) - \{(p^k(0), -p^k(1))\}. \tag{22}$$

Por [4, Proposição 2.6.4, p. 71],

$$\operatorname{co} \partial_{x,u}(p^{k+1}(t) \cdot f(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t))) = p^{k+1}(t) D_{x,u} f(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)),$$

e por [4, Proposição 2.6.2, p. 70], $D_{x,u} f(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)) \subset k_f(t) B$ em quase todo ponto em $[0,1]$, em que $D_{x,u} f$ denota a Jacobiana Generalizada de Clarke[4] de f com respeito a (x,u) no ponto (t,x,u). Assim, de (21) e das Hipóteses (H1) e (H2),

$$|\dot{p}^k(t)| \leq |p^k(t)| k_f(t) + |\varepsilon^k(t)| + |\varphi^k(t)| \leq |p^k(t)| k_f(t) + k_\varepsilon(t) + k_\varphi(t) \tag{23}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[0,1]$. Logo, pela desigualdade de Gronwall [7, Lema 1],

$$|p^k(t)| \leq \exp(\|k_f\|_{L_1^1})[|p^k(1)| + \|(k_\varepsilon + k_\varphi)\|_{L_1^1}] \leq \exp(\|k_f\|_{L_1^1})[1 + \|(k_\varepsilon + k_\varphi)\|_{L_1^1}] \tag{24}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[0,1]$. Consequentemente, $\{\dot{p}^k\}$ é uniformemente integravelmente limitada. Então, com a ajuda do Teorema de Dunford-Pettis [13, Teorema 2.5.1, p. 87], através da extração de uma subsequência (não renomearemos), podemos concluir que, para alguma função $p \in W_n^{1,1}$, $p^k \to p$ uniformemente e $\dot{p}^k \rightharpoonup \dot{p}$ em L_n^1.

Pela Hipótese (H1), existe uma função integrável k_η tal que $|\eta^k(t)| \leq k_\eta(t)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[0,1]$. Assim, por (21) e (24),

$$|\psi^k(t)| \leq |p^k(t)| k_f(t) + |\eta^k(t)| \leq \left[\exp(\|k_f\|_{L_1^1})(1 + \|(k_\varepsilon + k_\varphi)\|_{L_1^1}) \right] k_f(t) + k_\eta(t) \tag{25}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[0,1]$. Consequentemente, $\{\psi^k\}$ é uniformemente integravelmente limitada. Assim, novamente pelo Teorema de Dunford-Pettis [13, Teorema 2.5.1, p.

[4] Veja [4, Definição 2.6.1] para mais detalhes.

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0502

87], extraindo uma subsequência (mais uma vez não renomearemos), concluímos que $\psi^k \rightharpoonup \psi$ para alguma função $\psi \in L^1_m$.

Como $\lambda_k \leq 1$ e, pela Hipótese (H), ℓ é localmente Lipschitz, de (22) e (24), segue que a sequência $\{(\gamma^k, \xi^k)\}$ é limitada. Então, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass [9, Teorema 5, p. 17], podemos tomar uma subsequência (não renomearemos) tal que $(\gamma^k, \xi^k) \to (\gamma, \xi)$ para algum $(\gamma, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Portanto,

$$(\varphi, \psi, \gamma, \xi) \in -\operatorname*{w\text{-}lim\,sup}_{\substack{x\to\bar{x},\, u\to\bar{u}\\ \nu\to 0}} \mathcal{M}_2(x, u, \nu). \tag{26}$$

Uma modificação direta na prova do Teorema da Compacidade das Trajetórias [4, Teorema 3.1.7, p. 118] e um apelo às propriedades de semicontinuidade superior dos cones normais e subdiferenciais limites, permitem-nos tomar limite nas relações (21) e (22) para obter

$$\begin{aligned}(\varphi(t), \psi(t), \gamma, \xi) \in \operatorname{co}\partial_{x,u}(p(t)\cdot f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))) - \{(-\dot{p}(t), 0)\}&\\ \times (\lambda\partial\ell(\bar{x}(0), \bar{x}(1)) - \{(p(0), -p(1))\})&\end{aligned} \tag{27}$$

quase todo ponto em $[0,1]$. Além disso, como $\lambda_k \to \lambda$ e $p^k \to p$ uniformemente, por (15), $\lambda + \|p\|_{L^\infty_n} \neq 0$. Portanto, $(\varphi, \psi, \gamma, \xi) \in \mathcal{M}(\bar{x}, \bar{u})$ e concluímos a demonstração. □

Inspirados nos resultados fornecidos pelos Lemas 2.1 e 2.2, definimos a regularidade AWMP para o Problema (P) como segue.

Definição 2.1. *Um processo $(\bar{x}, \bar{u})$, factível para (P), é dito Asymptotic Weak Maximum Principle regular, ou simplesmente processo AWMP-regular (ou AWMP-regular), sempre que*

$$\operatorname*{w\text{-}lim\,sup}_{\substack{x\to\bar{x},\, u\to\bar{u}\\ \nu\to 0}} \mathcal{M}_2(x, u, \nu) \subset \mathcal{M}_2(\bar{x}, \bar{u}, 0). \tag{28}$$

Com base na Definição 2.1, o próximo resultado segue imediatamente dos Lemas 2.1 e 2.2. Em síntese, ele nos diz que a condição AWMP-regular funciona como uma condição de qualificação para o Problema (P), ou seja, garante a validade do princípio do máximo fraco clássico.

Teorema 2.1. *Seja $(\bar{x}, \bar{u})$ um minimizador local fraco para (P). Suponha que as Hipóteses (H), (H1), (H2) e (CC) são satisfeitas. Se $(\bar{x}, \bar{u})$ for um processo AWMP-regular de (P), então $(\bar{x}, \bar{u})$ satisfaz as condições do princípio do máximo fraco clássico.*

3 Considerações Finais

Como as condições de otimalidade tradicionais têm que ser verificadas na solução ótima do problema estudado, que a depender de sua complexidade, pode tornar a obtenção de tal solução uma tarefa árdua ou mesmo impraticável, as condições de otimalidade sequenciais, tais como as fornecidas pelo princípio do máximo fraco assintótico, se destacam como poderosas ferramentas, visto que existem caminhos práticos para a sua obtenção, por exemplo, através de uma versão adequada do método de Lagrangiano aumentado, vide [12]. Adicionalmente, a regularidade AWMP estabelece o cenário sob o qual essas condições sequenciais implicam nas condições de otimalidade clássicas estabelecidas pelo princípio do máximo. Em resumo, o princípio do máximo fraco assintótico define critérios práticos para a seleção de candidatos a soluções em problemas de controle ótimo e a regularidade AWMP, quando atendida, assegura que esses critérios possuem precisão equivalente às condições do princípio do máximo. Como investigações futuras pretendemos verificar se a regularidade AWMP é a condição mínima sobre a qual o princípio do máximo fraco assintótico implica no princípio do máximo fraco clássico e estabelecer as relações entre a AWMP-regularidade e as condições de qualificação para problemas de controle ótimo existentes na literatura, por exemplo, as CQs do tipo posto completo [6], posto constante [2], Mangasarian-Fromovitz [5, 8], entre outras.

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0502

Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processos 2013/07375-0 e 2022/16005-0, e pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Referências

[1] R. Andreani, G. Haeser e J. M. Martínez. “On sequential optimality conditions for smooth constrained optimization”. Em: **Optimization** 60.5 (2011), pp. 627–641. DOI: 10.1080/02331930903578700.

[2] R. Andreani, V. A. de Oliveira, J. T. Pereira e G. N. Silva. “A weak maximum principle for optimal control problems with mixed constraints under a constant rank condition”. Em: **IMA Journal of Mathematical Control and Information** 37.3 (2020), pp. 1021–1047. DOI: 10.1093/imamci/dnz036.

[3] E. Börgens, C. Kanzow, P. Mehlitz e G. Wachsmuth. “New constraint qualifications for optimization problems in Banach spaces based on asymptotic KKT Conditions”. Em: **SIAM Journal on Optimization** 30.4 (2020), pp. 2956–2982. DOI: 10.1137/19M1306804.

[4] F. Clarke. **Optimization and Nonsmooth Analysis**. New York: Wiley, 1983.

[5] F. Clarke e M. d. R. de Pinho. “Optimal control problems with mixed constraints”. Em: **SIAM Journal on Control and Optimization** 48.7 (2010), pp. 4500–4524. DOI: 10.1137/090757642.

[6] M. d. R. de Pinho e A. Ilchmann. “Weak maximum principle for optimal control problems with mixed constraints”. Em: **Nonlinear Analysis** 48 (2002), pp. 1179–1196. DOI: 10.1016/S0362-546X(01)00094-3.

[7] M. d. R. de Pinho, P. Loewen e G. N. Silva. “A weak maximum principle for optimal control problems with nonsmooth mixed constraints”. Em: **Set-Valued and Variational Analysis** 17.2 (2009), pp. 203–221. DOI: 10.1007/s11228-009-0108-1.

[8] M. d. R. de Pinho e J. F. Rosenblueth. “Necessary conditions for constrained problems under Mangasarian–Fromowitz conditions”. Em: **SIAM Journal on Control and Optimization** 47.1 (2008), pp. 535–552. DOI: 10.1137/060663623.

[9] E. L. Lima. **Curso de Análise**. 1ª ed. Vol. 2. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

[10] P. Mehlitz. “Asymptotic stationarity and regularity for nonsmooth optimization problems”. Em: **Journal of Nonsmooth Analysis and Optimization** 1 (2020), Artigo Nº 6575, pp. 1–30. DOI: 10.46298/jnsao-2020-6575.

[11] R. B. Moreira e V. A. de Oliveira. “Princípio do máximo fraco assintótico”. Em: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**. 2022.

[12] R. B. Moreira e V. A. de Oliveira. “Um método do tipo Lagrangiano aumentado para problemas de controle ótimo com restrições mistas e função de custo não suave”. Em: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**. 2023, pp. 010110-1–7. DOI: 10.5540/03.2023.010.01.0110.

[13] R. Vinter. **Optimal Control**. Boston: Birkhäuser, 2000.

