

# Propriedades Efetivas de Ordem Superior de Meios Unidimensionais Microperiódicos Funcionalmente Graduados Localmente Lineares

Leslie D. Pérez-Fernández<sup>1</sup>

UFPel, Pelotas, RS

Julián Bravo-Castillero<sup>2</sup>

UNAM, Mérida, México

Fabio C. da Rocha<sup>3</sup>

UFS, São Cristóvão, SE

Maria S. M. Sampaio<sup>4</sup>

UEA, Manaus, AM

**Resumo.** Apresenta-se a aplicação de uma metodologia de obtenção das propriedades efetivas de ordem superior de uma barra elástica microperiódica funcionalmente graduada com comportamentos constitutivo linear e efetivo não linear com efeitos de gradiente de segunda ordem. Tal metodologia baseia-se na homogeneização assintótica e na invariância da densidade de energia efetiva com relação às escalas estruturais e tem sido aplicada com sucesso a materiais compósitos. Um exemplo é apresentado para ilustrar o efeito de escala, isto é, o fato experimentalmente observado de que as propriedades efetivas de ordem superior são desprezáveis em presença de separação de escalas estruturais, enquanto tais propriedades devem ser consideradas quando a escala da heterogeneidade é da mesma ordem que a escala do meio como um todo.

**Palavras-chave.** Meio Microperiódico Funcionalmente Graduado Localmente Linear, Propriedades Efetivas de Ordem Superior, Método de Homogeneização Assintótica, Densidade de Energia Efetiva Escalarmente Invariante, Efeito de Escala

## 1 Introdução

Métodos tradicionais de homogeneização matemática (tais como convergência em duas escalas [2, 19], homogeneização assintótica [5, 7],  $\Sigma$ -,  $G$ -,  $\Gamma$ - e  $H$ -convergências [10, 18, 20, 26], homogeneização de dois espaços [12, 13], homogeneização de tangente de segunda ordem [22, 23], funções teste oscilantes [27]) baseiam-se na separação de escalas estruturais nos meios heterogêneos cujos modelos pretendem resolver. Tal separação de escalas é caracterizada pelo parâmetro geométrico  $\varepsilon > 0$ , de maneira que, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, esses métodos de homogeneização conseguem produzir estimativas precisas das propriedades macroscópicas efetivas do meio heterogêneo que descrevem o meio homogêneo equivalente correspondente. Contudo, quando  $\varepsilon \lesssim 1$ , ou seja, quando a escala da heterogeneidade é da mesma ordem da escala macroscópica, a homogeneização clássica falha [29, 30] e resulta necessário considerar termos adicionais na lei efetiva para representar adequadamente os efeitos de escala observados experimentalmente [17]. Diferentes técnicas

---

<sup>1</sup>leslie.fernandez@ufpel.edu.br

<sup>2</sup>julian@mym.iimas.unam.mx

<sup>3</sup>fabiocrocha@academico.ufs.br

<sup>4</sup>msampaio@uea.edu.br

de homogeneização têm sido propostas para incorporar tais termos adicionais: por exemplo, no contexto da mecânica dos meios contínuos generalizados [3] tais como as teorias de: meios micropolares [11] e micromorfos [24], tensão acoplada [25] e gradiente de deformação [28]. Em particular, a homogeneização assintótica tem sido aplicada na construção de meios contínuos de gradiente de deformação [4, 8] inclusive para a obtenção de propriedades efetivas de materiais compósitos [1, 6, 9, 15, 16, 29, 30]. Neste trabalho, aplica-se essa metodologia para obter as propriedades efetivas de uma barra elástica micropériódica funcionalmente graduada localmente linear e globalmente não linear com efeitos de gradientes de segunda ordem. Finalmente, apresenta-se um exemplo para ilustrar o efeito de escala, isto é, o fato experimentalmente observado de que as propriedades efetivas de ordem superior são desprezáveis em presença de separação de escalas estruturais, enquanto tais propriedades devem ser consideradas quando a escala da heterogeneidade é da mesma ordem que a escala do meio como um todo.

## 2 Metodologia

Seja uma barra heterogênea com comportamento constitutivo elástico linear na microescala e não linear com efeitos de gradiente de segunda ordem na macroescala. A barra tem estrutura periódica de maneira que um elemento representativo de volume  $\Omega$  pode ser formado por várias células de periodicidade e tem tamanho relativo  $\varepsilon$ . A hipótese fundamental é que a densidade de energia efetiva é invariante com relação à escala, ou seja,  $\langle W^\varepsilon(x) \rangle = \langle W^M(x) \rangle$ , em que  $\langle \cdot \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (\cdot) d\Omega$  é o operador do valor médio sobre  $\Omega$  e as energias elásticas nas escalas micro e macro são, respectivamente,

$$W^\varepsilon(x) = \frac{1}{2} C^\varepsilon(x) \left( \frac{du^\varepsilon}{dx} \right)^2, \quad (1)$$

$$W^M(x) = \frac{1}{2} C^M \left( \frac{du^M}{dx} \right)^2 + G^M \frac{du^M}{dx} \frac{d^2u^M}{dx^2} + \frac{1}{2} D^M \left( \frac{d^2u^M}{dx^2} \right)^2, \quad (2)$$

em que  $C^\varepsilon(x)$  e  $C^M$  são propriedades elásticas de primeira ordem e  $G^M$  e  $D^M$  são propriedades elásticas de ordem superior, sendo  $C^M$ ,  $G^M$  e  $D^M$  constantes.

Procura-se o deslocamento na microescala  $u^\varepsilon(x)$  mediante o ansatz de Bakhvalov [21]

$$u^\varepsilon(x) \sim u_0(x) + \varepsilon N_1(y) \frac{du_0}{dx} + \varepsilon N_2(y) \frac{d^2u_0}{dx^2}, \quad y = \frac{x - x^c}{\varepsilon}, \quad (3)$$

em que  $x^c = \langle x \rangle$  é o centro geométrico de  $\Omega$ , e as funções locais  $N_k(y)$ ,  $k = 1, 2$ , têm média nula e, sendo  $N_0(y) \equiv 1$ , podem ser procuradas via teoria clássica de homogeneização assintótica como soluções periódicas do  $k$ -ésimo problema local dado por

$$\frac{d}{dy} \left[ C(y) \left( \frac{dN_k}{dy} + N_{k-1}(y) \right) \right] = 0, \quad \langle N_k(y) \rangle = 0, \quad (4)$$

em que  $C(y) = C^\varepsilon(x)$ . A propriedade elástica efetiva de primeira ordem  $\widehat{C}$  obtém-se do primeiro problema local como

$$\widehat{C} = \left\langle C(y) \left( \frac{dN_1}{dy} + 1 \right) \right\rangle. \quad (5)$$

Por outro lado, pode-se assumir que o deslocamento macroscópico  $u^M(x)$  coincide com o termo  $u_0(x)$  de ordem  $O(\varepsilon^0)$  do ansatz, de maneira que

$$\frac{d^k u_0}{dx^k} = \frac{d^k u^M}{dx^k}, \quad k = 0, 1, 2 \implies \left\langle \frac{d^k u_0}{dx^k} \right\rangle = \left\langle \frac{d^k u^M}{dx^k} \right\rangle, \quad k = 0, 1, 2. \quad (6)$$

De aproximar  $u^M(x)$  pelo polinômio quadrático de Taylor ao redor de  $x^c$ , tem-se

$$u^M(x) \approx u^M(x^c) + \frac{du^M}{dx} \Big|_{x=x^c} (x - x^c) + \frac{1}{2} \frac{d^2u^M}{dx^2} \Big|_{x=x^c} (x - x^c)^2, \quad (7)$$

$$\frac{du^M}{dx} \approx \frac{du^M}{dx} \Big|_{x=x^c} + \frac{d^2u^M}{dx^2} \Big|_{x=x^c} (x - x^c), \quad (8)$$

$$\frac{d^2u^M}{dx^2} \approx \frac{d^2u^M}{dx^2} \Big|_{x=x^c}, \quad (9)$$

donde

$$\langle u^M(x) \rangle \approx u^M(x^c) + \frac{1}{2} \frac{d^2u^M}{dx^2} \Big|_{x=x^c} \langle (x - x^c)^2 \rangle, \quad \left\langle \frac{d^k u^M}{dx^k} \right\rangle = \frac{d^k u^M}{dx^k} \Big|_{x=x^c}, \quad k = 1, 2, \quad (10)$$

e, portanto,

$$u^M(x) \approx u^M(x^c) + \left\langle \frac{du^M}{dx} \right\rangle (x - x^c) + \frac{1}{2} \left\langle \frac{d^2u^M}{dx^2} \right\rangle (x - x^c)^2, \quad (11)$$

$$\frac{du^M}{dx} \approx \left\langle \frac{du^M}{dx} \right\rangle + \left\langle \frac{d^2u^M}{dx^2} \right\rangle (x - x^c), \quad (12)$$

$$\frac{d^2u^M}{dx^2} \approx \left\langle \frac{d^2u^M}{dx^2} \right\rangle. \quad (13)$$

Logo, a densidade de energia efetiva com relação à macroescala é

$$\langle W^M(x) \rangle = \left\langle \frac{1}{2} C^M \left( \frac{du^M}{dx} \right)^2 + G^M \frac{du^M}{dx} \frac{d^2u^M}{dx^2} + \frac{1}{2} C^M \left( \frac{d^2u^M}{dx^2} \right)^2 \right\rangle \quad (14)$$

$$\approx \frac{1}{2} C^M \left\langle \frac{du^M}{dx} \right\rangle^2 + G^M \left\langle \frac{du^M}{dx} \right\rangle \left\langle \frac{d^2u^M}{dx^2} \right\rangle + \frac{1}{2} (C^M I + D^M) \left\langle \frac{d^2u^M}{dx^2} \right\rangle^2, \quad (15)$$

em que  $I = \langle (x - x^c)^2 \rangle = \varepsilon^2 \langle y^2 \rangle$ .

Para determinar as propriedades efetivas  $C^M$ ,  $G^M$  e  $D^M$  em termos das funções locais  $N_k(y)$ ,  $k = 1, 2$ , deriva-se o ansatz levando em conta a regra da cadeia  $\frac{d}{dx} \equiv \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial y}$  de maneira que

$$\frac{du^\varepsilon}{dx} \sim \left( 1 + \frac{dN_1}{dy} \right) \frac{du^M}{dx} + \varepsilon \left( N_1(y) + \frac{dN_2}{dy} \right) \frac{d^2u^M}{dx^2} \quad (16)$$

$$= \left( 1 + \frac{dN_1}{dy} \right) \left( \left\langle \frac{du^M}{dx} \right\rangle + \varepsilon y \left\langle \frac{d^2u^M}{dx^2} \right\rangle \right) + \varepsilon \left( N_1(y) + \frac{dN_2}{dy} \right) \left\langle \frac{d^2u^M}{dx^2} \right\rangle \quad (17)$$

$$= L(y) \left\langle \frac{du^M}{dx} \right\rangle + \varepsilon M(y) \left\langle \frac{d^2u^M}{dx^2} \right\rangle, \quad (18)$$

em que

$$L(y) = 1 + \frac{dN_1}{dy}, \quad M(y) = yL(y) + N_1(y) + \frac{dN_2}{dy}. \quad (19)$$

Assim, a densidade de energia efetiva com relação à microescala é

$$\langle W^\varepsilon(x) \rangle \sim \left\langle \frac{1}{2} C(y) \left( L(y) \left\langle \frac{du^M}{dx} \right\rangle + \varepsilon M(y) \left\langle \frac{d^2u^M}{dx^2} \right\rangle \right)^2 \right\rangle \quad (20)$$

$$= \frac{1}{2} \hat{C} \left\langle \frac{du^M}{dx} \right\rangle^2 + \hat{G} \left\langle \frac{du^M}{dx} \right\rangle \left\langle \frac{d^2u^M}{dx^2} \right\rangle + \frac{1}{2} \hat{D} \left\langle \frac{d^2u^M}{dx^2} \right\rangle^2, \quad (21)$$

em que

$$\widehat{C} = \langle C(y)L^2(y) \rangle, \quad \widehat{G} = \varepsilon \langle C(y)L(y)M(y) \rangle, \quad \widehat{D} = \varepsilon^2 \langle C(y)M^2(y) \rangle. \quad (22)$$

Portanto, da hipótese de invariância da densidade de energia efetiva, tem-se  $\widehat{C} = C^M$ ,  $\widehat{G} = G^M$  e  $\widehat{D} = C^M I + D^M$ . Ainda, observe que  $\langle C(y)L(y) \rangle = \langle C(y)L^2(y) \rangle$ , de maneira que  $\widehat{C} = \langle C(y)L(y) \rangle$ .

### 3 Exemplo

Considere a propriedade elástica de primeira ordem

$$C(y) = 1 + \frac{1}{4} \cos 2\pi y, \quad (23)$$

que corresponde a uma barra microperiódica funcionalmente graduada, de maneira que a propriedade efetiva correspondente é  $\widehat{C} = \sqrt{15}/4$ . Logo, tem-se que

$$\frac{dN_1}{dy} = \frac{\widehat{C}}{C(y)} - 1, \quad \frac{dN_2}{dy} = -N_1(y), \quad (24)$$

em que [14]

$$N_1(y) = \begin{cases} N(y), & y \in [0, 1/2) \\ 0, & y = 1/2 \\ N(y) - y, & y \in (1/2, 1) \end{cases}, \quad (25)$$

com

$$N(y) = \frac{1}{\pi} \arctan \left( \sqrt{\frac{3}{5}} \tan \pi y \right) - y. \quad (26)$$

A Figura 1 apresenta o comportamento das propriedades efetivas dadas por (22) perante a variação do parâmetro geométrico  $\varepsilon \in [0, 1]$ . Observe que as propriedades efetivas de ordem superior são desprezáveis em presença de separação de escalas ( $0 < \varepsilon \ll 1$ ), enquanto devem ser consideradas no comportamento efetivo quando as escalas da heterogeneidade e do meio como um todo são da mesma ordem ( $\varepsilon \lesssim 1$ ).

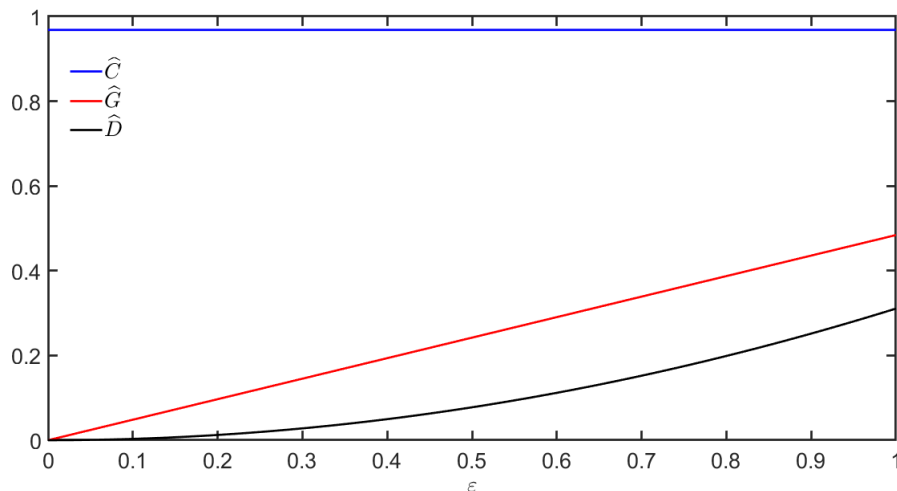


Figura 1: Propriedades efetivas.

## 4 Considerações Finais

Neste trabalho, apresentou-se a aplicação de uma metodologia de obtenção das propriedades efetivas de ordem superior de uma barra elástica microperiódica funcionalmente graduada com comportamentos constitutivo linear e efetivo não linear com efeitos de gradiente de segunda ordem. Esta metodologia é baseada na homogeneização assintótica e na invariância da densidade de energia efetiva com relação às escalas estruturais. Ainda, foi apresentado um exemplo para ilustrar o efeito de escala experimentalmente observado de que as propriedades efetivas de ordem superior devem ser consideradas quando a escala da heterogeneidade é da mesma ordem que a escala do meio como um todo, enquanto podem ser desprezadas em presença de separação de escalas estruturais. Finalmente, observe que a metodologia apresentada pode ser generalizada naturalmente para modelar situações tridimensionais em que a heterogeneidade ocorre em uma direção (por exemplo, esferas e cilindros centrossimétricos com heterogeneidade na direção radial e compósitos laminados com lâminas funcionalmente graduadas) inclusive para casos não periódicos utilizando a homogeneização de dois espaços.

## Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) via Projeto Universal Nº 402857/2021-6.

## Referências

- [1] B. E. Abali e E. Barchiesi. “Additive manufacturing introduced substructure and computational determination of metamaterials parameters by means of the asymptotic homogenization”. Em: **Continuum Mechanics and Thermodynamics** 33 (2021), pp. 993–1009. DOI: 10.1007/s00161-020-00941-w.
- [2] G. Allaire. “Homogenization and two-scale convergence”. Em: **SIAM Journal on Mathematical Analysis** 23 (1992), pp. 1482–1518. DOI: 10.1137/0523084.
- [3] H. Altenbach e S. Forest (Eds.) **Generalized continua as models for classical and advanced materials**. 1a. ed. Cham: Springer, 2016. ISBN: 9783319317199.
- [4] A. Bacigalupo, M. Paggi, F. Dal Corso e D. Bigoni. “Identification of higher-order continua equivalent to a Cauchy elastic composite”. Em: **Mechanics Research Communications** 93 (2018), pp. 11–22. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2017.07.002.
- [5] N. S. Bakhvalov e G. P. Panasenko. **Homogenisation: averaging processes in periodic media**. 1a. ed. Dordrecht: Kluwer, 1989. ISBN: 9789401075060.
- [6] S. Barboura e J. Li. “Establishment of strain gradient constitutive relations by using asymptotic analysis and the finite element method for complex periodic microstructures”. Em: **SIAM Journal on Mathematical Analysis** 136 (2018), pp. 60–76. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2017.12.003.
- [7] A. Bensoussan, J.-L. Lions e G. Papanicolau. **Asymptotic analysis for periodic structures**. 1a. ed. Amsterdam: North-Holland, 1978. ISBN: 9780444851727.
- [8] C. Boutin, F. dell’Isola, I. Giorgio e L. Placidi. “Linear pantographic sheets: Asymptotic micro-macro models identification”. Em: **Mathematics and Mechanics of Complex Systems** 5 (2017), pp. 127–162. DOI: 10.2140/memocs.2017.5.127.

- [9] J. Bravo-Castillero, L. D. Pérez-Fernández, F. C. Rocha e M. S. M. Sampaio. “Higher-order effective stiffness tensors of periodic laminated structures via asymptotic homogenization”. Em: **Proceedings of III European-Latin American Conference of Theoretical and Applied Mechanics**. 2024, pp. 6–7.
- [10] E. De Giorgi. “ $G$ -operators and  $\Gamma$ -convergence”. Em: **Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vol. 2)**. 1984, pp. 1175–1191. ISBN: 0444866694.
- [11] F. Dos Reis e J. F. Ganghoffer. “Construction of micropolar continua from the asymptotic homogenization of beam lattices”. Em: **Computers & Structures** 112–113 (2012), pp. 354–363. DOI: 10.1016/j.compstruc.2012.08.006.
- [12] J. B. Keller. “Darcy’s law for flow in porous media and the two-space method”. Em: **Non-linear Partial Equations in Engineering and Applied Science: Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics**. Ed. por R. L. Sternberg, A. J. Kalinowski e J. S. Papadakis. Vol. 54. Dekker, 1980. Cap. 27, pp. 429–443. ISBN: 0824769961.
- [13] J. B. Keller. “Effective behavior of heterogeneous media”. Em: **Proceedings of the Symposium on Statistical Mechanics and Statistical Methods in Theory and Applications**. 1977, pp. 631–644. DOI: 10.1007/978-1-4613-4166-6.
- [14] B. S. Leitzke. “Soluções assintóticas formais de segunda ordem na homogeneização assintótica de meios microperiódicos”. Dissertação de mestrado. UFPel, 2017.
- [15] J. Li. “A micromechanics-based strain gradient damage model for fracture prediction of brittle materials—Part I: Homogenization methodology and constitutive relations”. Em: **International Journal of Solids and Structures** 48 (2011), pp. 3336–3345. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2011.08.007.
- [16] J. Li e X.-B. Zhang. “A numerical approach for the establishment of strain gradient constitutive relations in periodic heterogeneous materials”. Em: **European Journal of Mechanics - A/Solids** 41 (2013), pp. 70–85. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2013.03.001.
- [17] W. H. Müller. “The experimental evidence for higher gradient theories”. Em: **Mechanics of Strain Gradient Materials. CISM International Centre for Mechanical Sciences**. Ed. por A. Bertram e S. Forest. Vol. 600. Springer, 2020. Cap. 1, pp. 1–18. DOI: 10.1007/978-3-030-43830-2\_1.
- [18] F. Murat e L. Tartar. “ $H$ -convergence”. Em: **Topics in the Mathematical Modelling of Composite Materials. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications**. Ed. por A. Cherkaev e R. Kohn. Vol. 31. Springer, 1997. Cap. 3, pp. 21–43. DOI: 10.1007/978-1-4612-2032-9\_3.
- [19] G. Nguetseng. “A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization”. Em: **SIAM Journal on Mathematical Analysis** 20 (1989), pp. 608–623. DOI: 10.1137/0520043.
- [20] G. Nguetseng. “Homogenization structures and applications I”. Em: **Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen** 22 (2003), pp. 73–108. DOI: 10.4171/ZAA/1133.
- [21] G. P. Panasenko. “Homogenization for periodic media: from microscale to macroscale”. Em: **Physics of Atomic Nuclei** 71 (2008), pp. 681–694. DOI: 10.1134/S106377880804008X.
- [22] P. Ponte Castañeda. “Second-order homogenization estimates for nonlinear composites incorporating field fluctuations: I-theory”. Em: **Journal of the Mechanics and Physics of Solids** 50 (2002), pp. 737–757. DOI: 10.1016/S0022-5096(01)00099-0.
- [23] P. Ponte Castañeda e E. Tiberio. “A second-order homogenization method in finite elasticity and applications to black-filled elastomers”. Em: **Journal of the Mechanics and Physics of Solids** 48 (2000), pp. 1389–1411. DOI: 10.1016/S0022-5096(99)00087-3.

- [24] O. Rokoš, M. M. Ameen, R. H. J. Peerlings e M. G. D. Geer. “Micromorphic computational homogenization for mechanical metamaterials with patterning fluctuation fields”. Em: **Journal of the Mechanics and Physics of Solids** 123 (2019), pp. 119–137. DOI: 10.1016/j.jmps.2018.08.019.
- [25] A. Skrzat e V. A. Eremeyev. “On the effective properties of foams in the framework of the couple stress theory”. Em: **Continuum Mechanics and Thermodynamics** 32 (2020), pp. 1779–1801. DOI: 10.1007/s00161-020-00880-6.
- [26] S. Spagnolo. “Convergence in energy for elliptic operators”. Em: **Proceedings of the Third Symposium on the Numerical Solution of Partial Differential Equations**. 1976, pp. 469–499. DOI: 10.1016/B978-0-12-358503-5.50021-X.
- [27] L. Tartar. **The General Theory of Homogenization: A Personalized Introduction**. 1a. ed. Heidelberg: Springer, 2009. ISBN: 9783642051944.
- [28] O. Weeger. “Numerical homogenization of second gradient, linear elastic constitutive models for cubic 3D beam-lattice metamaterials”. Em: **International Journal of Solids and Structures** 224 (2021), p. 111037. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2021.03.024.
- [29] H. Yang, B. E. Abali, W. H. Müller, S. Barboura e J. Li. “Verification of asymptotic homogenization method developed for periodic architected materials in strain gradient continuum”. Em: **International Journal of Solids and Structures** 238 (2022), p. 111386. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2021.111386.
- [30] H. Yang, B. E. Abali, D. Timofeev e W. H. Müller. “Determination of metamaterial parameters by means of a homogenization approach based on asymptotic analysis”. Em: **Continuum Mechanics and Thermodynamics** 32 (2020), pp. 1251–1270. DOI: 10.1007/s00161-019-00837-4.