

Simulação Numérica de uma Equação da Onda Bidimensional com Controle de Fronteira Dinâmico

Rodrigo L. R. Madureira¹

IME/Departamento de Matemática Aplicada/UERJ, Rio de Janeiro, RJ

Mauro A. Rincon²

IC/PPGI/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ

Moussa Bzeih³, Toufic Elarwadi⁴

Beirut Arab University, Faculty of sciences

Ali Wehbe⁵

Lebanese University, Faculty of sciences, KAIMA, Hadath-Beirut

Resumo. Neste trabalho, estudamos a solução numérica de uma equação de onda linear bidimensional com controle dinâmico na fronteira. Novas dificuldades matemáticas aparecem devido às condições de fronteira. Ao adicionar algum termo de viscosidade artificial, introduzimos um problema penalizado e a boa formulação é feita usando o método Faedo-Galerkin. Um esquema numérico totalmente discreto é proposto usando os métodos de Elementos Finitos no espaço e Diferenças Finitas no tempo. Ao final, uma simulação numérica é apresentada.

Palavras-chave. Equação da Onda Bidimensional, Elemento Finito, Método Numérico, Controle Dinâmico na Fronteira

1 Introdução

O estudo de diferentes sistemas distribuídos com controles de fronteira dinâmicos, do ponto de vista teórico, foi feito por muitos autores (ver por exemplo [6], [5], [12], [7] e [10]). O modelo linear unidimensional foi desenvolvido recentemente em [4], no qual o controle de fronteira era apenas uma função do tempo, enquanto neste trabalho o controle de fronteira é uma função de duas variáveis e requer mais regularidade nos dados iniciais.

Na abordagem bidimensional deste trabalho (ver [3]), a estabilidade de uma membrana elástica é tratada numericamente. Em repouso, a membrana tem uma forma semelhante a um conjunto aberto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ com limite Γ da classe C^2 consistindo em uma parte fixada não vazia Γ_0 , e uma parte com aro Γ_1 tal que $\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1 = \emptyset$. Um controle dinâmico é efetivamente aplicado em Γ_1 . A vibração da membrana é governada pelo seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) = 0, \quad \text{in } \Omega \times [0, T], \\ u(x, t) = 0 \quad \text{on } \Gamma_0 \times [0, T], \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, t) + \xi(x, t) = 0 \quad \text{on } \Gamma_1 \times [0, T], \\ \xi_t(x, t) + \xi(x, t) = u_t(x, t) \quad \text{on } \Gamma_1 \times [0, T], \end{array} \right. \quad (1)$$

¹rodrigo.madureira@ime.uerj.br

²rincon@ic.ufrj.br

³moussabzeih81@gmail.com

⁴telarwadi@gmail.com

⁵ali.wehbe@ul.edu.lb

com as seguintes condições iniciais:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega \quad \text{and} \quad \xi(x, 0) = \xi_0(x), \quad x \in \Gamma_1, \quad (2)$$

onde $\xi(x, t)$ indica o controle dinâmico.

Resultados de existência e simulação numérica para uma equação hiperbólica com coeficientes variáveis e condições de contorno acústico foram obtidos em [2] e [1]. Podemos recomendar as referências [8] e [9] para análise numérica de sistemas hiperbólicos não lineares.

Nosso objetivo é mostrar uma abordagem implícita totalmente discreta para a aproximação do sistema (1) e de sua versão penalizada usando os métodos de elementos finitos e diferenças finitas.

2 Problema penalizado

A aproximação numérica proposta por Tébou e Zuazua [11] é baseada no problema penalizado que inclui uma viscosidade artificial

$$\begin{cases} y_t^{\epsilon} - \Delta y^{\epsilon} - \epsilon^2 \Delta y_t^{\epsilon} = 0 & \text{in } \Omega \times [0, T], \\ y^{\epsilon}(x, t) = 0 & \text{on } \Gamma_0, \\ \frac{\partial y^{\epsilon}}{\partial n}(x, t) + \eta^{\epsilon}(x, t) = 0 & \text{on } \Gamma_1, \\ \eta_t^{\epsilon}(x, t) + \eta^{\epsilon}(x, t) = y_t^{\epsilon}(x, t) & \text{on } \Gamma_1, \end{cases} \quad (3)$$

com $x \in \Omega$, $t > 0$ e as seguintes condições iniciais,

$$y^{\epsilon}(x, 0) = u_0(x), \quad y_t^{\epsilon}(x, 0) = u_1(x), \quad \text{for } x \in \Omega \quad \text{and} \quad \eta^{\epsilon}(x, 0) = \xi_0(x) \quad \text{for } x \in \Gamma_1. \quad (4)$$

Denotamos por $|\cdot|$, $|\cdot|_1$, (\cdot, \cdot) e $(\cdot, \cdot)_1$ as normas e produtos escalares em $L^2(\Omega)$ e $L^2(\Gamma_1)$, respectivamente. Também introduzimos os espaços $H_{\Gamma_0}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) / u|_{\Gamma_0} = 0\}$ e $V = \{u \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) / u|_{\Gamma_1} \in L^2(\Gamma_1)\}$. Multiplicando a primeira equação de (3) por uma função de teste $v \in V$ e usando a fórmula de Green com as condições iniciais e de contorno, obtemos a forma fraca de (3). O próximo passo é encontrar $y^{\epsilon}(\cdot, t) \in V$ e $\eta^{\epsilon}(\cdot, t) \in L^2(\Gamma_1)$ tais que, para todos $v, w \in V$,

$$\begin{cases} (y_{tt}^{\epsilon}, v) + (\nabla y^{\epsilon}, \nabla v) + \epsilon^2 (\nabla y_t^{\epsilon}, \nabla v) + (\eta^{\epsilon} + \epsilon^2 \eta_t^{\epsilon}, v)_{\Gamma_1} = 0, \\ (\eta_t^{\epsilon}(x, t), w)_1 + (\eta^{\epsilon}(x, t), w)_1 = (y_t^{\epsilon}(x, t), w)_1. \end{cases} \quad (5)$$

2.1 Teoremas da existência e unicidade

Os teoremas de existência e unicidade para o problema original (1) e penalizado (3) são respectivamente enunciados a seguir.

Teorema 2.1. *Suponha que $u_0, u_1 \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Então, para todo $T > 0$, o problema original (1) tem uma solução única (u, ξ) sob as seguintes regularidades:*

1. $u \in L^{\infty}(0, T, H_{\Gamma_0}^2(\Omega))$,
2. $u_t \in L^{\infty}(0, T, H_{\Gamma_0}^1(\Omega))$,
3. $u_{tt} \in L^{\infty}(0, T, L^2(\Omega))$,
4. $\xi, \xi_t \in L^{\infty}(0, T, L^2(\Gamma_1)) \cap L^2(0, T, L^2(\Gamma_1))$,
5. $\frac{\partial u}{\partial n}(x, t) + \xi(x, t) = 0, \forall x \in \Gamma_1$.

Teorema 2.2. *Suponha que $u_0, u_1 \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $\xi_0 \in L^2(\Gamma_1)$ e $\frac{\partial}{\partial n} u_0(x) = -\xi_0(x)$ para todo $x \in \Gamma_1$. Então, para todo $T > 0$, existe uma solução única para o problema penalizado (3) sob as seguintes regularidades:*

1. $y^\epsilon \in L^\infty(0, T, H_{\Gamma_0}^1(\Omega))$, and $Y_2 = L^2(0, T, H_{\Gamma_0}^1(\Omega))$,
2. $y_t^\epsilon \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T, H_{\Gamma_0}^1(\Omega))$, 6. $y_{tt}^\epsilon - \Delta y^\epsilon - \epsilon^2 \Delta y_t^\epsilon = 0$
3. $y_{tt}^\epsilon \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T, H_{\Gamma_0}^1(\Omega))$, a.e. in $\Omega \times (0, T)$,
4. $\eta^\epsilon, \eta_t^\epsilon \in X_1 \cap Y_1$, 7. $\frac{\partial y}{\partial n}(x, t) + \eta(t) = 0, \forall x \in \Gamma_1$,
where $X_1 = L^\infty(0, T, L^2(\Gamma_1))$
5. $\nabla(\nabla y^\epsilon + \epsilon^2 \nabla y_t^\epsilon) \in X_2 \cap Y_2$, 8. $y^\epsilon(x, 0) = u_0(x)$,
and $Y_1 = H^1(0, T, L^2(\Gamma_1))$,
 $y_t^\epsilon(x, 0) = u_1(x)$
- where $X_2 = L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$ and $\eta^\epsilon(x, 0) = \xi_0(x), \forall x \in \Gamma_1$.

Agora, definimos a energia associada ao problema penalizado.

Definição 2.1. A energia do problema auxiliar (3) é definida por

$$E^\epsilon(t) = \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} (|y_t^\epsilon|^2 + |\nabla y^\epsilon|^2) dx + (1 + \epsilon^2) \int_{\Gamma_1} |\zeta^\epsilon|_1^2 d\Gamma \right). \quad (6)$$

Escolhendo $v = 2y_t^\epsilon$ e $\psi = \zeta^\epsilon + \epsilon^2 \zeta_t^\epsilon$ em (5), podemos mostrar que a energia do problema penalizado é uma função decrescente, ou seja, $E'(t) \leq 0$.

3 Resultados numéricos

Consideramos o problema (3) na forma não homogênea,

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{tt}^\epsilon - \Delta y^\epsilon - \epsilon^2 \Delta y_t^\epsilon = f^\epsilon(x, y, t) \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \zeta^\epsilon(x, t) + \zeta_t^\epsilon(x, t) - y_t^\epsilon(x, t) = g^\epsilon(x, t) \quad \text{in } \Gamma_1 \times (0, T), \\ y^\epsilon(x, t) = 0 \quad \text{on } \Gamma_0, \\ \frac{\partial}{\partial n} y^\epsilon(x, t) + \zeta^\epsilon(x, t) = 0 \quad \text{on } \Gamma_1, \end{array} \right. \quad (7)$$

onde f^ϵ e g^ϵ são forças externas suficientemente regulares e são introduzidas para validar o problema em uma abordagem numérica. Assim, a formulação variacional em (5) torna-se

$$\left\{ \begin{array}{l} (y_{tt}^\epsilon, v) + (\nabla y^\epsilon, \nabla v) + \epsilon^2 (\nabla y_t^\epsilon, \nabla v) + (\zeta^\epsilon + \epsilon^2 \zeta_t^\epsilon, v)_{\Gamma_1} = (f^\epsilon, v), \\ (\zeta_t^\epsilon, \psi)_{\Gamma_1} - (y_t^\epsilon, \psi)_{\Gamma_1} + (\zeta^\epsilon, \psi)_{\Gamma_1} = (g^\epsilon, \psi)_{\Gamma_1}. \end{array} \right. \quad (8)$$

Sejam V_{m_u} e Z_{m_v} os subespaços gerados por $\{w_1, w_2, \dots, w_{m_u}\}$ e $\{z_1, z_2, \dots, z_{m_v}\}$, respectivamente, onde $\{w_i\}_{i=1}^\infty$ e $\{z_i\}_{i=1}^\infty$ são bases ortogonais suaves para V e $Z = L^2(\Gamma_1)$, respectivamente. Procuramos por

$$y^m(x_1, x_2, t) = \sum_{i=1}^{m_u} d_{im}(t) w_i(x_1, x_2), \quad \zeta^m(x_1, t) = \sum_{i=1}^{m_v} s_{im}(t) z_i(x_1, x_2b), \quad (9)$$

satisfazendo (8), $\forall v \in V_m, \forall \psi \in Z_m$. Observe que x_{2b} em (9) é um ponto fixo x_{2b} no limite Γ_1 . Substituindo (9) em (8), tomando $v = w_j, \psi = z_j$ e definindo as matrizes como

$$A_{ij} = (w_i, w_j); \quad B_{ij} = (\nabla w_i, \nabla w_j); \quad L_{1ij} = (z_i, w_j)_{\Gamma_1}; \quad L_{2ij} = (z_i, z_j)_{\Gamma_1}; \quad L_{3ij} = (w_i, z_j)_{\Gamma_1}, \quad (10)$$

obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} Ad''(t) + \epsilon^2 Bd'(t) + Bd(t) + \epsilon^2 L_1^T s'(t) + L_1^T s(t) = F(t), & \forall t \in [0, T], \\ L_2 s'(t) + L_2 s(t) - L_3^T d'(t) = G(t), & \forall t \in [0, T]. \end{cases} \quad (11)$$

3.1 Esquema numérico totalmente discreto

Aqui, mostramos o desenvolvimento de um esquema numérico totalmente discreto usando elementos finitos e diferenças finitas para (11). O intervalo $[0, T]$ é uniformemente dividido em N subintervalos de tamanho $\Delta t = T/N$. Então, $t_n = n\Delta t$, para $n = 0, 1, \dots, N$ e $d^n = d(\cdot, t_n)$. A primeira e a segunda derivadas no tempo t serão aproximadas pelas diferenças central e progressiva dadas respectivamente por

$$d''^n = \frac{1}{\Delta t} (d^{n+1} - 2d^n + d^{n-1}); \quad d'^n = \frac{1}{\Delta t} (d^{n+1} - d^n). \quad (12)$$

Tomando $t = t_n$ em (11)₁, substituindo as aproximações e multiplicando por Δt^2 , obtemos o seguinte método iterativo:

$$R_1 d^{n+1} = -R_2 d^n - R_3 d^{n-1} - R_4 s^{n+1} - R_5 s^n + \Delta t^2 F^{n+1}, \quad (13)$$

onde $d^0 = P^h u_0$, $d^1 = d^0 + \Delta t P^h u_1$, $s^0 = P^h \xi_0$ e as matrizes são definidas por

$$R_1 = A + \Delta t(\epsilon^2 + \Delta t)B; \quad R_2 = -2A - \Delta t\epsilon^2 B; \quad R_3 = A; \quad R_4 = \Delta t(\epsilon^2 + \Delta t)L_1^T; \quad R_5 = -\Delta t\epsilon^2 L_1^T.$$

Analogamente, tomando $t = t_n$ em (11)₂, substituindo as aproximações, multiplicando por Δt e organizando os termos, obtemos

$$R_6 s^{n+1} = -R_7 s^n - R_8 d^{n+1} - R_9 d^n + \Delta t G^{n+1}, \quad (14)$$

onde $R_6 = (1 + \Delta t)L_2$; $R_7 = -L_2$; $R_8 = -L_3^T$; $R_9 = L_3^T$. Assim, multiplicando (14) por R_6^{-1} , temos

$$s^{n+1} = -R_6^{-1} R_7 s^n - R_6^{-1} R_8 d^{n+1} - R_6^{-1} R_9 d^n + \Delta t R_6^{-1} G^{n+1}, \quad (15)$$

Substituindo (15) em (13) e organizando os termos, obtemos

$$\hat{R}_1 d^{n+1} = -\hat{R}_2 d^n - \hat{R}_3 d^{n-1} - \hat{R}_4 s^n - \hat{R}_5 G^{n+1} + \Delta t^2 F^{n+1}, \quad (16)$$

onde

$$C = \Delta t L_1^T R_6^{-1}; \quad D = \epsilon^2 C L_3^T + \Delta t C L_3^T; \quad \hat{R}_1 = A + \Delta t \epsilon^2 B + \Delta t^2 B + D; \quad \hat{R}_2 = -2A - \Delta t \epsilon^2 B - D; \\ \hat{R}_3 = A; \quad \hat{R}_4 = \epsilon^2 C L_2 + \Delta t C L_2 - \Delta t \epsilon^2 L_1^T; \quad \hat{R}_5 = -(\epsilon^2 \Delta t C + \Delta t^2 L_1 \Delta t R_6^{-1}) G^{n+1}.$$

Usando as condições iniciais $d^0 = y^\epsilon(x_1, x_2, 0)$, $s^0 = \zeta^\epsilon(x_1, 0)$, e as aproximações de Taylor

$$d^1 = d^0 + \Delta t y_t^\epsilon(x_1, x_2, 0) + \Delta t^2 y_{tt}^\epsilon(x_1, x_2, 0); \quad s^1 = s^0 + \Delta t \zeta_t^\epsilon(x_1, 0), \quad (17)$$

onde $y_t^\epsilon(x_1, x_2, 0)$ é dado pelas condições iniciais, enquanto $y_{tt}^\epsilon(x_1, x_2, 0)$ e $\zeta_t^\epsilon(x_1, 0)$ são obtidos fazendo $t = 0$ em (7)₁ e (7)₂, respectivamente. Assim, obtemos d^2 tomando $n = 1$ em (16),

$$\hat{R}_1 d^2 = -\hat{R}_2 d^1 - \hat{R}_3 d^0 - \hat{R}_4 s^1 - \hat{R}_5 G^2 + \Delta t^2 F^2. \quad (18)$$

A seguir, podemos calcular s^2 tomando $n = 1$ em (14),

$$R_6 s^2 = -R_7 s^1 - R_8 d^2 - R_9 d^1 + \Delta t G^2. \quad (19)$$

Como os valores de d^2 e s^2 são conhecidos, podemos calcular as próximas iterações para $n = 2, 3, \dots, N$ usando as equações (16) e (14) nesta ordem.

3.2 Estimativas de erro para o esquema numérico totalmente discreto

Os teoremas a seguir estabelecem respectivamente as estimativas de erro para os problemas discretos penalizado (3) e original (1). Eles estimam a diferença entre as soluções analítica e numérica dos respectivos problemas.

Teorema 3.1. *Sob as hipóteses do teorema (2.2) e se $y \in X \cap Y$, onde $X = H^3(0, T, L^2(\Omega))$ e $Y = W^{2,\infty}(0, T, H^3(\Omega))$, $\zeta \in H^2(0, T, H^2(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0, T, H^2(\Omega))$, então*

$$|y_t(t_n) - \hat{y}^n|^2 + |\nabla y(t_n) - \nabla y^n|^2 + (1 + h^2)|\zeta(t_n) - \zeta^n|_1^2 \leq C(h^2 + (\Delta t)^2). \quad (20)$$

Teorema 3.2. *Seja $u(x, t)$ a solução analítica do problema (1) e $y^n(x)$ a solução numérica do problema (11). Se $u_0, u_1 \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $\xi_0 \in L^2(\Gamma_1)$ e usamos as mesmas hipóteses do teorema (3.1), a ordem de convergência é dada por:*

$$|u_t(t_n) - \hat{y}^n|^2 + |\nabla u(t_n) - \nabla y^n|^2 + (1 + h^2)|\xi(t_n) - \zeta^n|_1 \leq C(h^2 + (\Delta t)^2). \quad (21)$$

3.3 Simulação numérica

No nosso experimento, consideramos $t \in [0, 1]$, $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$ para o plano espacial nas variáveis x_1 e x_2 e as limitações

$$\begin{cases} (1) = \{(x_1, 0) \in \partial\Omega; 0 \leq x_1 \leq 1\}, & (2) = \{(1, x_2) \in \partial\Omega; 0 \leq x_2 \leq 1\}, \\ (3) = \{(x_1, 1) \in \partial\Omega; 0 \leq x_1 \leq 1\}, & (4) = \{(0, x_2) \in \partial\Omega; 0 \leq x_2 \leq 1\}, \end{cases}$$

onde $\Gamma_0 = (2) \cup (3) \cup (4)$, $\Gamma_1 = (1)$ e os dados iniciais $y_0^\epsilon(x_1, x_2) = \sin(\pi x_1)(x_2 - 1)^3$, $y_1^\epsilon(x_1, x_2) = -\sin(\pi x_1)(x_2 - 1)^3$, $\zeta_0^\epsilon(x_1) = -u_{0x_2}(x_1) = 3 \sin(\pi x_1)$.

3.3.1 Problema não homogêneo

Sejam

$$y^\epsilon(x_1, x_2, t) = \sin(\pi x_1)(x_2 - 1)^3 e^{-t} \quad \text{e} \quad \zeta^\epsilon(x_1, t) = 3 \sin(\pi x_1) e^{-t}.$$

A Tabela 1 mostra os erros e as ordens de convergência correspondentes às variáveis nas normas $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ e $L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_1))$, respectivamente, tomando $\Delta t = \Delta x_1 = \Delta x_2$. A ordem de convergência $p \approx 1$ corrobora o Teorema 3.1. A Tabela 2 mostra os erros tomando $\Delta t = (\Delta x_1)^2 = (\Delta x_2)^2$. Agora, a ordem de convergência é quadrática, ou seja, $p \approx 2$, resultado que também está de acordo com o Teorema 3.1.

Tabela 1: Erros e ordens de convergência - Problema penalizado não homogêneo: $\Delta t = \Delta x_1 = \Delta x_2$.

$\Delta t = \Delta x_1 = \Delta x_2$	E_y	E_ζ	p_y	p_ζ
2^{-6}	0.001894	0.006042	0.865890	0.933758
2^{-7}	0.000993	0.003091	0.930724	0.967119
2^{-8}	0.000509	0.001563	0.964476	0.983605

3.3.2 Problema homogêneo

Para os respectivos problemas homogêneos original (1) e penalizado (3), temos $f(x_1, x_2, t) = 0$, $g(x_1, t) = 0$ e $f^\epsilon(x_1, x_2, t) = 0$, $g^\epsilon(x_1, t) = 0$. Como as soluções exatas são desconhecidas, apenas exibimos os gráficos. Os gráficos do problema original são mostrados na Figura 1, onde a malha foi obtida em $\Delta t = 1/4096$.

Tabela 2: Erros e ordens de convergência - Problema penalizado não homogêneo: $\Delta t = (\Delta x_1)^2 = (\Delta x_2)^2$.

$\Delta x_1 = \Delta x_2$	Δt	E_y	E_ζ	p_y	p_ζ
2^{-3}	2^{-6}	0.003181	0.006047	1.525002	1.556903
2^{-4}	2^{-8}	0.014386	0.040869	1.869081	1.877483
2^{-5}	2^{-10}	0.000223	0.000420	1.967587	1.968779

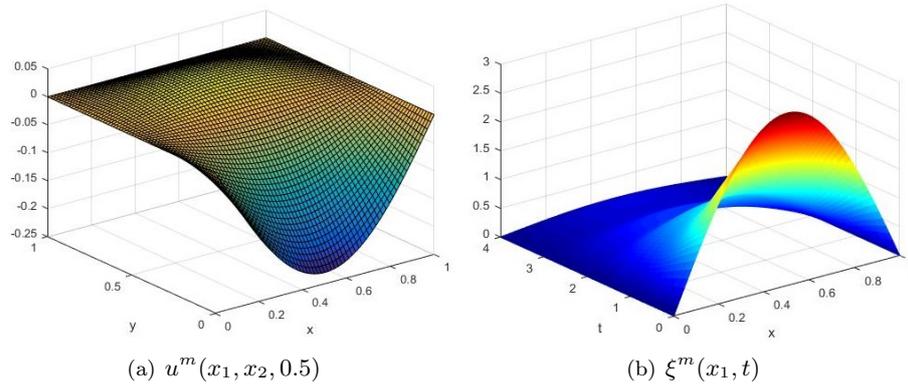


Figura 1: Problema original homogêneo: $\Delta t = (\Delta x_1)^2 = (\Delta x_2)^2 = 1/4096$.

3.3.3 Energy decay

A Figura 2 mostra dois gráficos: um deles representa o logaritmo neperiano da função de decaimento de energia, ou seja, $\ln(E(t))$, e o outro é obtido usando o método dos mínimos quadrados, onde determinamos o logaritmo neperiano da função exponencial que melhor se ajusta à reta para o mesmo conjunto de pontos.

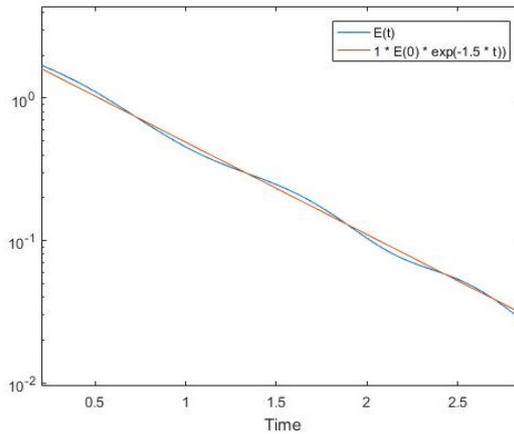


Figura 2: Gráfico de $\ln(E(t))$ e a melhor reta de ajuste para o decaimento exponencial.

Referências

- [1] A.A. Alcantara, B.A. Carmo, H.R. Clark, R.R. Guardia e M.A. Rincon. “Nonlinear wave equation with Dirichlet and Acoustic boundary conditions: theoretical analysis and numerical simulation”. Em: **Computational & Applied Mathematics** 41.141 (2022), pp. 1–21.
- [2] A.A. Alcantara, H.R. Clark e M.A. Rincon. “Theoretical analysis and numerical simulation for a hyperbolic equation with Dirichlet and acoustic boundary conditions”. Em: **Computational & Applied Mathematics** 37.4 (2018), pp. 4772–4792.
- [3] M. Bzeih, T. Arwadi, A. Wehbe, M.A. Rincon e R.L.R. Madureira. “A finite element scheme for a 2D-wave equation with dynamical boundary control”. Em: **Mathematics and Computers in Simulation** 205 (2023), pp. 315–339. DOI: 10.1016/j.matcom.2022.09.024.
- [4] M. Bzeih, T. Arwadi, A. Wehbe, M.A. Rincon e R.L.R. Madureira. “Numerical analysis and simulation for a wave equation with dynamical boundary control”. Em: **Journal of Scientific Computing** 87.1 (2021). DOI: 10.1007/s10915-021-01408-z.
- [5] B. Rao. “Exact boundary controllability of a hybrid system of elasticity by the HUM method”. Em: **ESIAM: COCV** 6 (2001), pp. 183–199.
- [6] B. Rao. “Stabilization of elastic plates with dynamical boundary control”. Em: **J. Control Optim.** 36 (1998), pp. 148–163.
- [7] B. Rao e A. Wehbe. “Polynomial energy decay rate and strong stability of Kirchhoff plates with non-compact resolvent”. Em: **J. Evol. Equ.** 5 (2005), pp. 137–152.
- [8] M.A. Rincon, I.-S. Liu, W.R. Huarcaya e B.A. Carmo. “Numerical analysis for a nonlinear model of elastic strings with moving ends”. Em: **Applied Numerical Mathematics** 135 (2019), pp. 146–164.
- [9] M.A. Rincon e N.P. Quintino. “Numerical analysis and simulation for a nonlinear wave equation”. Em: **Journal of Computational and Applied Mathematics** 296 (2016), pp. 247–264.
- [10] M.A. Sammoury, S Nicaise, D. Mercier e A. Wehbe. “Optimal Energy Decay Rate for Rayleigh Beam Equation with Only One Dynamic Boundary Control”. Em: **Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática** 35 (2017), pp. 131–171.
- [11] L.R.T. Tébou e E. Zuazua. “Uniform exponential long time decay for the space semi-discretization of a locally damped wave equation via an artificial numerical viscosity”. Em: **Numer. Math.** 95 (2003), pp. 563–598.
- [12] A. Wehbe. “Optimal energy decay rate in the Rayleigh beam equation with boundary dynamical controls”. Em: **Bull. Belg. Math. Soc.** 12 (2005), pp. 1–16.