

# Métodos Numéricos de Zero de Funções Aplicados em Problemas de Taxa Interna de Retorno

Jorge Luis Torrejón Matos<sup>1</sup>, Paula Olga Gneri<sup>2</sup>

DAMAT/UTFPR, Curitiba, PR

Jessica Fernandes Veronese<sup>3</sup>

PROFMAT/UTFPR, Curitiba, PR

**Resumo.** Apresenta-se três métodos numéricos - Bisseção, Newton-Raphson e Secante - como forma de encontrar taxas de juros aplicadas em transações financeiras partindo de situações reais e práticas e assim, buscar relacionar a Matemática Financeira com o Cálculo Numérico. A aplicação destes diferentes métodos visa, além de aprofundar as possibilidades daquele que possui conhecimento superior em matemática, alcançar também um público que muitas vezes se depararia com dificuldades no momento em que fosse realizar uma compra ao não ter a certeza de quanto estaria pagando por aquilo.

**Palavras-chave.** Métodos numéricos, Taxa de juro, Parcelamento, Zero de função

## 1 Introdução

Entender a relação existente entre tempo e dinheiro se tornou cada vez mais necessária nos dias de hoje. Consumidores estão tendo mais possibilidades em adquirir bens devido às facilidades em realizar compras de forma parcelada, ou ainda, se tratando de valores mais altos, como nos casos de imóveis e veículos, existem os financiamentos com instituições bancárias. Porém, não são raros os casos em que se praticam taxas abusivas nessas transações financeiras e a única forma do consumidor questionar tal cobrança é tendo conhecimento de como é feito esse cálculo.

Por outro lado, existem os investimentos e aplicações financeiras cuja finalidade é fazer o dinheiro render e aqui, ao contrário dos financiamentos, quanto maior for essa taxa, melhor será o retorno financeiro. Em suma, cada operação de crédito é operada por taxas de juros.

Para determinar um modelo matemático capaz de apresentar os valores das taxas de juros,  $i$ , usadas nessas transações financeiras, deve-se analisar os valores envolvidos na operação em uma mesma época de pagamento, sendo a época zero o ato da compra e a época  $n$  o pagamento da  $n$ -ésima parcela. Esse processo de análise, quando se tem prestações iguais e periódicas, recai em um polinômio de grau  $n$  cuja raiz é a taxa de juros procurada  $i$ , como ocorre na situação apontada por Lyuu [2]:

"Um banco emprestou a um mutuário \$ 260.000 por 15 anos (aqui  $n = 15$ ) para comprar uma casa. Essa hipoteca de 15 anos tem um pagamento mensal de \$ 2.000."

Por mais que se trate de  $n$  parcelas de igual valor e periódicas, este número  $n$  de parcelas é grande e, portanto, encontrar uma raiz do polinômios gerado, por métodos analíticos, é muitas vezes inviável. Nesses casos, a opção é procurar uma aproximação do valor da raiz, tão próxima quanto se queira através do uso de métodos numéricos.

---

<sup>1</sup>jtorrejon@utfpr.edu.br

<sup>2</sup>gneri@utfpr.edu.br

<sup>3</sup>jeveronese@gmail.com

Dos métodos existentes, serão usados três métodos clássicos: Bisseção, Newton-Raphson e Secante, para fins de comparação.

O tema deste trabalho tem como referência principal a obra de Lyuu [2] que discorre sobre uma engenharia financeira, relacionando a matemática financeira com os métodos numéricos. O objetivo é usar os três métodos numéricos, mencionados acima, para encontrar as taxas de juros aplicada em transações financeiras.

## 2 Matemática Financeira

Para entender o tema a ser trabalhado será feita uma introdução dos conceitos a partir de uma situação hipotética:

"Uma pessoa recebeu R\$80.000,00 de acerto ao se aposentar. Ela, sem saber qual seria a melhor opção, resolveu aplicar 50% desse valor em um investimento que rende juros simples e o restante do valor será aplicado à juros composto, ambos por um período de 6 meses com rendimento de 3% ao mês nas duas aplicações."

Analisando a situação apresentada, veja Neto [3], pode-se identificar e definir vários elementos existentes na Matemática Financeira, sendo:

- Capital(C): Representa o valor inicial de qualquer operação financeira. Também conhecido como principal. Na situação apresentada esse valor corresponde ao valor de R\$ 80.000,00.
- Juro(J): Pode ser visto como uma compensação financeira em caso de uma aplicação ou ainda como o custo de um capital em situações de empréstimos.
- Taxa de Juro (i): O valor do juro é calculado através de um coeficiente apresentado na forma percentual denominado por taxa de juro. Essa taxa pode ser definida como o custo do capital ao longo do tempo. Em um empréstimo, determina o valor a ser pago ou, no caso de uma aplicação, será o valor a ser recebido. A taxa de juros apresentado corresponde a 3%. Taxa de juro está relacionada com o tempo em que ocorre uma operação financeira. Sendo assim, deve vir acompanhada de sua temporalidade, sendo as mais usuais apresentadas a seguir: Ao dia (a.d.), ao mês (a.m.) e ao ano (a.a.).
- Montante: Ao final de uma transação financeira, obtemos o montante. Este, se refere a soma do capital aplicado inicialmente e do juro que foi acumulado ao longo do tempo e pode ser representado por:  $M = J + C$ .
- Sistema de Capitalização: É a forma como o juro irá incidir sobre o capital. Pode ocorrer de duas formas: Capitalização Simples e Capitalização Composta.

1. Capitalização Simples: Nesse sistema, o juro é determinado sobre o valor do capital e pode ser definido sendo:

$$J = C \cdot i \cdot n. \quad (1)$$

Na situação hipotética, tem-se que  $J = 40000 \cdot 0,03 \cdot 6 = 7200$ , ou seja, o juro simples, renderá ao aplicador o juro de, no final do período investido, R\$7.200,00.

2. Capitalização Composta: Nesse caso, o capital é alterado a todo novo mês de capitalização, pois nesse sistema, o juro é determinado sobre o valor acumulado do período anterior. Assim, o juro obtido nessa aplicação é dado pela soma dos valores determinados em cada período.

Portanto (veja Veronese [6]), a fórmula do montante do  $n$ -ésimo mês a juros composto pode ser definida por:

$$M = C \cdot (1 + i)^n. \quad (2)$$

Tendo conhecimento do montante acumulado em uma aplicação, é possível determinar os juros obtidos nela, da seguinte forma:

$$J = M - C = C \cdot [(1 + i)^n - 1]. \quad (3)$$

Quando é analisado uma situação financeira, deve-se levar em consideração o espaço de tempo existente entre o capital e o montante. Desta forma, o valor de uma transação se altera diversas vezes, podendo ela ser classificada em três diferentes momentos:

- Valor Presente (PV): Vem a ser o valor atualmente acumulado, podendo coincidir com o capital quando a transação foi iniciada na data atual, ou podendo ser um valor intermediário entre capital e montante quando a data atual esteja durante a transação.
- Valor Futuro (FV): Vem a ser o valor acumulado em qualquer data compreendida entre a atual e a final (vencimento da transação). Frequentemente, o valor presente e o valor futuro são tidos como sinônimos do capital e do montante, respectivamente.
- Valor Nominal (VN): Vem a ser um valor constante de uma transação financeira. Ou seja, o valor nominal pode ser tanto o capital quanto o montante.

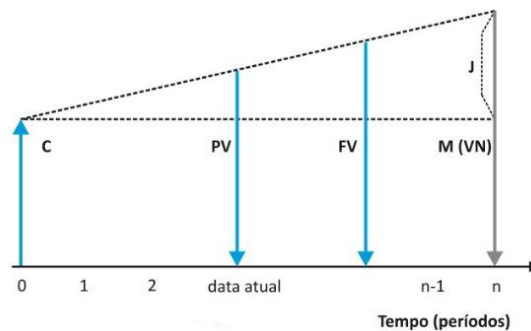


Figura 1: Valor no tempo. Fonte: Puccini [5].

O valor ou preço de um capital em um certo período de tempo é determinado por sua capitalização durante esse período. Como o juro é calculado periodicamente, através de uma taxa fixa ao mês, tem-se que o montante obtido, ao final da operação, se dará pela soma do capital inicial com a soma das capitalizações que ocorreram durante o processo. Assim, na situação hipotética, apresenta-se duas formas de capitalizar, sendo uma delas atrelada ao juro simples e a outra ao juro composto e, ao serem atreladas a uma mesma taxa dentro de um mesmo período de tempo, não é difícil perceber qual delas é a mais conveniente: na aplicação a juro composto, o montante acumulado foi R\$ 562,08 a mais que o acumulado a juro simples.

Conhecer o processo inverso, ou seja descapitalizar, se torna interessante nos casos em que o sujeito queira confirmar a taxa aplicada na prática (taxa interna de retorno) em uma operação de financiamento, por exemplo.

A equação (4) mostra esse processo de descapitalização, onde  $C_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , são as parcelas que seriam pagas no futuro para o presente e, para isso, precisa-se desconsiderar a taxa aplicada

ao fazer o processo inverso do que foi apresentado em (2), passando assim a dividir as parcelas por  $(1+i)^k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , ou seja:

$$PV = \frac{C_1}{(1+i)} + \frac{C_2}{(1+i)^2} + \frac{C_3}{(1+i)^3} + \dots + \frac{C_n}{(1+i)^n}. \quad (4)$$

Com isso, pode-se determinar a taxa interna de retorno, que é a taxa envolvida quando analisado o valor presente do capital na data inicial. De modo simples, é como se o sujeito resolvesse acertar as parcelas futuras todas no ato da compra, sendo descontado o juro que seria cobrado. Dessa forma, o comprador é capaz de verificar se a taxa cobrada confere com a informada no ato.

Considerando parcelas iguais,  $C_k = C$ ,  $k = 1, \dots, n$ , em todos os períodos de pagamento, pode-se reformular a equação (4) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} PV &= C \left[ \frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \dots + \frac{1}{(1+i)^n} \right] \\ &= C \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+i)^k}. \end{aligned} \quad (5)$$

Tomando  $P = PV$ , definimos a seguinte função:

$$f(x) = P - C \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+x)^k}. \quad (6)$$

Observe que, a partir da equação (5),  $i$  acaba sendo a raiz da equação  $f(x) = 0$ , onde  $f(x)$  é a função apresentada em (6).

O somatório do lado direito da igualdade em (6) representa uma soma geométrica para  $r = \frac{1}{1+x}$  e, desta forma, a função pode ser reescrita como se segue:

$$f(x) = P - \frac{C}{x} [1 - (1+x)^{-n}]. \quad (7)$$

A partir deste novo formato da função apresentada em (7) é determinada sua derivada que precisará ser usada em um dos métodos numéricos mencionados:

$$f'(x) = \frac{C}{x^2} [1 - (1+x)^{-n} - n \cdot x(1+x)^{-(n+1)}]. \quad (8)$$

### 3 Aplicação

Para uma melhor compreensão da teoria descrita acima apresenta-se o seguinte problema:

"Um carro foi adquirido pelo valor de 32 mil reais. Pôde ser negociado com apenas 3 mil reais de entrada e o restante financiado em 48 parcelas mensais e iguais, no valor de R\$994,28. Sob qual taxa foi feita essa negociação?"

As variáveis aqui apresentadas são:

- Valor à vista: R\$32.000,00;
- Valor a ser dado de entrada: R\$3.000,00;
- Valor a ser financiado: R\$29.000,00;
- Valor de cada parcela mensal:  $C = R\$994,28$ ;
- Quantidade de parcelas: 48;
- Taxa aplicada:  $i = x$ .

Nesta situação, é possível considerar o valor presente P como o valor a ser financiado, neste caso R\$29.000,00 assim, usando (7):

$$f(x) = 29000 - \frac{994,28}{x} (1 - (1 + x)^{-48}). \tag{9}$$

Nas Figuras abaixo observa-se o gráfico da função  $f$ .

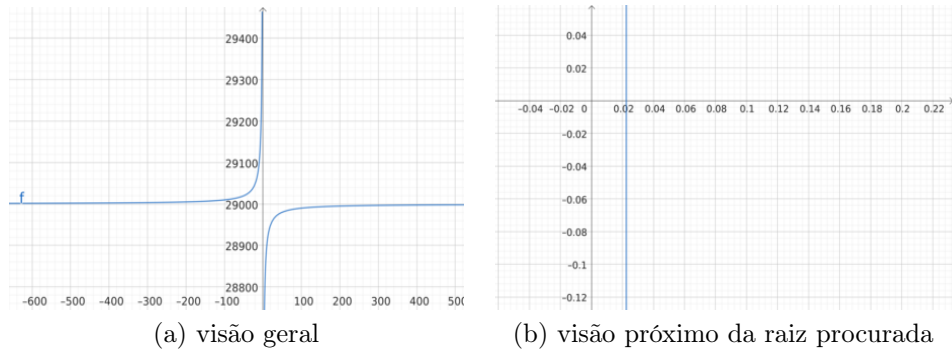


Figura 2: Gráfico da  $f(x)$  plotado no GeoGebra. Fonte: elaborado pelos autores.

### 3.1 Método da Bissecção

A partir do gráfico 2(b), é possível notar que a raiz procurada está no intervalo  $[0,02; 0,04]$ , o que correspondem 2% e 4% a.m.

Este intervalo será usado como ponto de partida para aplicar o método da Bissecção. Assim, serão obtidas as iterações apresentadas na Figura 3.

ITERAÇÃO	a	b	f(a)	f(b)	x_m	f(x_m)	PRECISÃO	PARADA
1	0,020	0,04	-1497,669328	7926,105267	0,030000	3877,818927	0,020000	NÃO
2	0,020000	0,030000	-1497,669328	3877,818927	0,025000	1385,708730	0,010000	NÃO
3	0,020000	0,025000	-1497,669328	1385,708730	0,022500	-2,697953	0,005000	NÃO
4	0,022500	0,025000	-2,697953	1385,708730	0,023750	704,245841	0,002500	NÃO
5	0,022500	0,023750	-2,697953	704,245841	0,023125	354,029365	0,001250	NÃO
6	0,022500	0,023125	-2,697953	354,029365	0,022813	176,488538	0,000625	NÃO
7	0,022500	0,022813	-2,697953	176,488538	0,022656	87,102135	0,000313	NÃO
8	0,022500	0,022656	-2,697953	87,102135	0,022578	42,253944	0,000156	NÃO
9	0,022500	0,022578	-2,697953	42,253944	0,022539	19,790976	0,000078	NÃO
10	0,022500	0,022539	-2,697953	19,790976	0,022520	8,549759	0,000039	NÃO
11	0,022500	0,022520	-2,697953	8,549759	0,022510	2,926715	0,000020	NÃO
12	0,022500	0,022510	-2,697953	2,926715	0,022505	0,114584	0,000010	NÃO
13	0,022500	0,022505	-2,697953	0,114584	0,022502	-1,291634	0,000005	NÃO
14	0,022502	0,022505	-1,291634	0,114584	0,022504	-0,588512	0,000002	NÃO
15	0,022504	0,022505	-0,588512	0,114584	0,022504	-0,236961	0,000001	NÃO
16	0,022504	0,022505	-0,236961	0,114584	0,022505	-0,061188	0,000001	SIM

Figura 3: Iterações método da Bissecção em financiamento de um carro. Fonte: Veronese [6].

A Equação abaixo, ver [1], é capaz de estimar o número de iterações, neste caso, como sendo no mínimo 15 iterações:

$$K > \frac{\log(0,04 - 0,02) - \log(10^{-6})}{\log(2)} \approx 14,288. \tag{10}$$

Onde  $10^{-6}$  é a tolerância dada na Bissecção como critério de parada. Na prática, encontra-se uma taxa de 2,25% na 16ª iteração.

### 3.2 Método de Newton-Raphson

Para o método de Newton-Raphson, a derivada dessa função se faz necessária, ver [4] e [6], e pode ser obtida através da equação (8):

$$f'(x) = \frac{994,28}{x^2} \left[ 1 - (1+x)^{-48} - 48 \cdot x(1+x)^{-(49)} \right]. \quad (11)$$

Com isso, o método se concretiza com apenas 3 iterações, considerado-se como estimativa inicial uma taxa de 2%, como segue na Figura 4.

ITERAÇÃO	Xn	F(Xn)	F'(Xn)	Xn+1	F(Xn+1)	b-a	PARADA
1	0,02	-1497,669328	620585,5524	0,022413316	-52,69601762	0,002413316	NÃO
2	0,022413316	-52,69601762	577528,4067	0,02250456	-0,071066063	9,1244E-05	NÃO
3	0,02250456	-0,071066063	575971,5277	0,022504684	-1,29756E-07	1,23385E-07	SIM

Figura 4: Iterações método de Newton-Raphson em financiamento de um carro. Fonte: Veronese [6].

Aqui foi encontrada a mesma taxa que já havia sido calculada através do método da Bissecção, porém com um número bem reduzido de iterações.

### 3.3 Método da Secante

O último método a ser aplicado será o da Secante, veja [1] e [6]. Neste método, não se faz necessário o uso da derivada da função e, com 6 iterações, a taxa é encontrada:

ITERAÇÃO	Xn-1	Xn	F(Xn-1)	F(Xn)	Xn+1	b-a	PARADA
1	0,02	0,04	-1497,669328	7926,105267	0,023178491	0,02	NÃO
2	0,04	0,023178491	7926,105267	384,2558259	0,022321439	0,016821509	NÃO
3	0,023178491	0,022321439	384,2558259	-105,8302616	0,022506513	0,000857053	NÃO
4	0,022321439	0,022506513	-105,8302616	1,053213804	0,022504689	0,000185074	NÃO
5	0,022506513	0,022504689	1,053213804	0,002852606	0,022504684	1,82369E-06	NÃO
6	0,022504689	0,022504684	0,002852606	-7,7147E-08	0,022504684	4,95284E-09	SIM

Figura 5: Iterações método da Secante em financiamento de um carro. Fonte: Veronese [6].

### 3.4 Comparação dos três métodos

Na aplicação dos três métodos numéricos, encontra-se uma taxa igual a 2,25%.

Na Figura 6, é possível verificar graficamente a rapidez em que os três métodos encontram a raiz procurada.

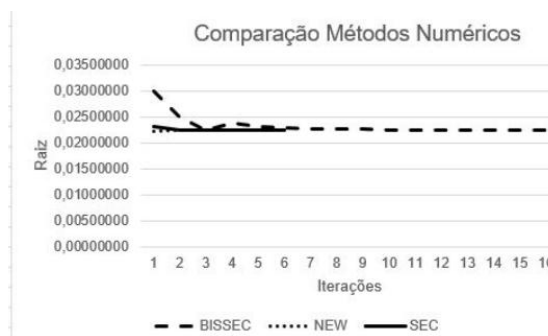


Figura 6: Comparação entre os três Métodos Numéricos. Fonte: Veronese [6].

## 4 Considerações Finais

Este trabalho traz como proposta o estudo de duas áreas importantes para formação de alunos no ensino médio: matemática financeira e métodos numéricos.

No estudo de matemática financeira tivemos uma preocupação específica de entender a relação existente entre tempo e dinheiro. Para verificar esta relação a proposta é trabalhar com transações financeiras verificando como a taxa de juros influencia no montante final da transação de acordo com o tempo transcorrido. Assim, usando alguns dados de cada transação, cria-se um polinômio  $f$ , que depende portanto de cada transação. A partir deste polinômio é possível calcular a taxa interna de retorno que está sendo aplicada na transação ao encontrar a raiz da equação  $f(x) = 0$ .

Desta forma, surge de maneira intuitiva a questão de determinar as raízes de equações e, nesse instante, torna-se claro que os métodos analíticos para encontrar essas raízes podem não ser suficientes sendo preciso então utilizar os métodos numéricos para obter aproximações precisas das raízes.

Dos métodos apresentados neste trabalho temos dois que podem ser ensinados, com bastante detalhes para alunos de ensino médio: O método da Bissecção e o método das Secantes, visto que em seus algoritmos são necessários apenas conceitos matemáticos desenvolvidos na escola básica. O método Newton-Raphson também pode ser introduzido no ensino médio mas é preciso tomar o cuidado de definir a função derivada necessária sem falar do processo de derivação de funções, apenas usando a derivada que já foi encontrada pelo professor.

Apresentando esses três métodos, é viável debater com os estudantes sobre os prós e contras de cada um. Observa-se que a quantidade de iterações requeridas no método da Bissecção pode ser consideravelmente maior em comparação com os outros dois métodos, o que torna o processo lento. Por outro lado, trata-se de um procedimento de simples execução, uma vez que demanda apenas noções elementares de matemática. No caso do método das Secantes a convergência é mais rápida que no método da Bissecção, mas envolve um conhecimento um pouco maior, como cálculo de retas secantes. Para concluir pode-se analisar que o método de Newton-Raphson é o mais rápido dos três, mas neste caso precisa-se de uma matemática muito mais avançada.

Finalmente, o objetivo desta proposta, além de trabalhar os conteúdos já apresentados neste texto, é mostrar para os alunos, através de um problema real da matemática financeira, que muitas vezes precisamos estudar métodos numéricos para resolver equações que surgem na matemática por modelagem da vida real. Mais ainda, ao observar que o método de Newton-Raphson é o mais eficiente dos estudados, o aluno pode concluir que ao ter ferramentas matemáticas mais avançadas, os métodos podem ficar mais eficazes, aumentando a curiosidade dos alunos pela matemática do ensino superior.

## Referências

- [1] D. Andrade e M. D. A. Carlos. **Cálculo Numérico**. v.1. 208 p. 32. Brazil: UniCesumar, 2017.
- [2] Y. D. Lyuu. **Financial Engineering and computation: Principles, mathematic, algorithms**. v.1. 627 p. 13. United Kingdom: [S.1.]: Cambridge, 2004.
- [3] A. A. Neto. **Matemática financeira e suas aplicações**. v.1. 308 p. 12. Brazil: Editora Atlas S.A., 2012.
- [4] B. P. Oleiro. **O teorema da função implícita**. Monografia. Paraná, 2016.
- [5] E. C. Puccini. **Matemática financeira e análise de investimentos**. v.1. 204 p. 18. Brazil: UFSC, 2011.
- [6] J. Veronese. “Métodos numéricos de Zero de Funções Aplicados em Problemas de Taxa Interna de Retorno”. Dissertação de mestrado. ProfMat - UTFPR, 2022.