Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Existência de Soluções para Equações Diferenciais Fracionárias do tipo $m(\xi)$-Kirchhoff

Everson F. S. Feitosa[1]
IMECC/UNICAMP, Campinas, SP
José Vanterler da C. Sousa[2]
DEMATI-UEMA, São Luís, MA

Resumo. Neste trabalho, primeiro investigamos a condição de compacidade de Palais-Smale do funcional $\mathbf{\Theta}_{\psi}^{\varpi,\mu}$ no espaço ψ-fracionário $\mathcal{H}_{m(\xi)}^{\varpi,\mu;\psi}(\Omega)$. Nesse sentido, através do teorema do Passo da Montanha, investigamos a existência de soluções fracas para uma nova classe de equações diferenciais fracionárias do tipo $m(\xi)$-Kirchhoff.

Palavras-chave. Existência, Problemas do Tipo $m(\xi)$-Kirchhoff, Soluções Fracas

1 Introdução

Os problemas do tipo Kirchhoff foram motivados por problemas de física, a saber, relacionados a processos de difusão. O modelo original de Kirchhoff foi utilizado para estudar os problemas no caso unidimensional [4]. Nesse sentido, ao longo dos anos, problemas do tipo Kirchhoff têm chamado a atenção. Destacamos a combinação de problemas do tipo Kirchhoff com o operador $p(x)$-Laplaciano e a versão estacionária da equação de Kirchhoff do tipo onda [1]. Por outro lado, temos derivadas fracionárias que também são usadas para discutir problemas Laplacianos [2]. A grande maioria dessas derivadas fracionárias está bem estabelecida. Contudo, não é uma tarefa simples e trivial escolher uma determinada derivada fracionária para formular e discutir propriedades de soluções de equações do tipo $p(x)$-Laplaciano. Uma forma de superar este problema é propor operadores mais gerais onde os existentes na literatura sejam casos particulares. Neste sentido, Sousa e Oliveira propuseram o operador fracionário ψ-Hilfer [7].

Neste presente trabalho, vamos considerar uma nova classe de problemas fracionários não locais do tipo $m(\xi)$-Kirchhoff dado por

$$\left\{\begin{array}{lll} \mathcal{M}(t)\mathfrak{D}_{T}^{\varpi,\mu;\psi}\left(\left|\mathfrak{D}_{0+}^{\varpi,\mu;\psi}\phi\right|^{m(\xi)-2}\mathfrak{D}_{0+}^{\varpi,\mu;\psi}\phi\right)=\lambda|\phi|^{m(\xi)-2}\phi+g(\xi,\phi) & \text{em} & \Omega \\ \phi=0 & \text{em} & \partial\Omega \end{array}\right. , \tag{1}$$

onde

$$\mathcal{M}(t):=a-b\int_{\Omega}\frac{1}{m(\xi)}\left|\mathfrak{D}_{0+}^{\varpi,\mu;\psi}\phi\right|^{m(\xi)}d\xi,\quad a\geqslant b>0 \tag{2}$$

com a e b constantes, $\Omega:=(0,T)\times(0,T)$ domínio limitado suave, $m\in C(\bar{\Omega})$, λ parâmetro real e g função contínua. Além disso, $\mathfrak{D}_{T}^{\varpi,\mu;\psi}(\cdot)$ e $\mathfrak{D}_{0+}^{\varpi,\mu;\psi}(\cdot)$ são as derivadas parciais fracionárias ψ-Hilfer à direita e à esquerda de ordem $0<\varpi<1$ e tipo $0\leq\mu\leq1$, respectivamente e $\varpi m(\xi)<2$.

Suponha que a não linearidade $g(\xi,t)\in C(\bar{\Omega}\times\mathbb{R})$ satisfaz as seguintes condições:

[1]everson.feitosa@ufape.edu.br
[2]vanterler@ime.unicamp.br

(g_1) condição de crescimento subcrítico $|g(\xi, s)| \leq C(1 + |s|^{q(\xi)-1})$, para todo $(\xi, s) \in \Omega \times \mathbb{R}$, onde $C > 0$ e $m(\xi) < q(\xi) < m^*(\xi) = \frac{2m(\xi)}{2-\varpi m(\xi)}$;

(g_2) $\lim_{s\to 0} \frac{g(\xi,s)}{|s|^{m(\xi)-2}s} = 0$;

(g_3) existem $s_A > 0$ e $\theta \in \left(m^+, \frac{2(m^-)^2}{m^+}\right)$ tal que $0 < \theta\mathcal{G}(\xi, s) \leq sg(\xi, s)$, para todo $|s| \geq s_A$, $\xi \in \Omega$, onde $\mathcal{G}(\xi, s) = \displaystyle\int_0^s g(\xi, t)dt$.

O principal objetivo deste trabalho é investigar a prova do seguinte teorema:

Theorem 1.1. *Suponha que a função $q \in C(\bar{\Omega})$ satisfaça*

$$1 < m^- < m(\xi) < m^+ < 2m^- < q^- < q(\xi) < m^*(\xi). \tag{3}$$

Então, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$ e com as condições (g_1)-(g_3) satisfeitas, o **Problema 1** *tem uma solução fraca não trivial.*

2 Operadores Fracionários e Estrutura Variacional

Seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^2$. Denote $C_+(\bar{\Omega}) = \{m(\xi); m(\xi) \in C(\bar{\Omega}), m(\xi) > 1 \text{ para todo } \xi \in \bar{\Omega}\}$ e $m^- = \inf_\Omega m(\xi) \leq m(\xi) \leq m^+ = \sup_\Omega m(\xi) < 2$. Para qualquer $m \in C_+(\bar{\Omega})$, introduzimos o espaço de Lebesgue de expoente variável

$$\mathscr{L}^{m(\cdot)}(\Omega) = \left\{\phi; \phi \text{ é mensurável e } \int_\Omega |\phi(\xi)|^{m(\xi)} d\xi < \infty\right\}$$

com a norma de Luxemburgo

$$\|\phi\|_{\mathscr{L}^{m(\xi)}} = |\phi|_{m(\cdot)} = \inf\left\{\mu > 0 : \int_\Omega \left|\frac{\phi(\xi)}{\mu}\right|^{m(\xi)} d\xi \leq 1\right\}.$$

Sejam $0 < \varpi < 1$ e $0 \leq \mu \leq 1$. Seja também $\Lambda = I_1 \times I_2$ onde $I_1 = (0, L]$ e $I_2 = (0, T]$, com T, L constantes positivas. Considere também que $\psi(\cdot)$ seja uma função monótona, crescente e positiva em I_2, com derivada contínua $\psi'(\cdot)$ em I_2. Além disso, sejam $\phi, \psi \in C^n(\Lambda)$ duas funções tais que ψ é crescente e $\psi'(\xi_2) \neq 0$ com $\xi_2 \in I_2$. As derivadas fracionárias parciais ψ-Hilfer de $\phi \in AC^n(\Lambda)$ de ordem ϖ e tipo μ, são definidas por [7, 8]

$$\mathfrak{D}_{0+}^{\varpi,\mu;\psi}\phi(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{I}_{0+}^{\mu(1-\varpi),\psi}\left(\frac{1}{\psi'(\xi_2)}\frac{\partial}{\partial\xi_2}\right)\mathbf{I}_{0+}^{(1-\mu)(1-\varpi),\psi}\phi(\xi_1, \xi_2)$$

e

$$\mathfrak{D}_{T}^{\varpi,\mu;\psi}\phi(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{I}_{T}^{\mu(1-\varpi),\psi}\left(-\frac{1}{\psi'(\xi_2)}\frac{\partial}{\partial\xi_2}\right)\mathbf{I}_{T}^{(1-\mu)(1-\varpi),\psi}\phi(\xi_1, \xi_2),$$

com $\xi_1 \in I_1$, onde $\mathbf{I}_{0+}^{\varpi,\psi}\phi(\xi_1, \xi_2)$ e $\mathbf{I}_{T}^{\varpi,\psi}\phi(\xi_1, \xi_2)$ são as integrais fracionárias ψ-Riemann-Liouville de $\phi \in \mathscr{L}^1(\Lambda)$ de ordem ϖ $(0 < \varpi < 1)$ [7, 8].

O espaço ψ-fracionário com expoente variável é definido por [5, 6] como

$$\mathcal{H}_{m(\xi)}^{\varpi,\mu;\psi}(\Omega) = \left\{\phi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}; \phi \in \mathscr{L}^{m(\cdot)}(\Omega), \left|\mathfrak{D}_{0+}^{\varpi,\mu;\psi}\phi\right| \in \mathscr{L}^{m(\cdot)}(\Omega)\right\}$$

equipado com a norma $\|\phi\|_{\mathcal{H}_{m(\xi)}^{\varpi,\mu;\psi}} = \|\phi\|_{m(\xi)} + \left\|\mathfrak{D}_{0+}^{\varpi,\mu;\psi}\phi\right\|_{m(\xi)}$.

Os espaços $\mathscr{L}^{m(\xi)}(\Omega)$ e $\mathcal{H}_{m(\xi)}^{\varpi,\mu;\psi}(\Omega)$ são considerados Banach, separáveis e reflexivos [5, 6].

Proposição 2.1. [5, 6] *Para $m, q \in C_+(\bar{\Omega})$ tais que $1 \leq q(\xi) \leq m^*_{\varpi}(\xi)$ para todo $\xi \in \bar{\Omega}$, existe uma imersão contínua $\mathcal{H}^{\varpi,\mu;\psi}_{m(\xi)}(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{L}^{q(\xi)}(\Omega)$. Se substituirmos $\leq$ por $<$, a imersão é completa.*

Lemma 2.1. [5] *Denote $\mathcal{A}(\phi) = \displaystyle\int_\Omega \frac{1}{m(\xi)} \left|\mathfrak{D}^{\varpi,\mu;\psi}_{0+}\phi\right|^{m(\xi)} d\xi$ para todo $\phi \in \mathcal{H}^{\varpi,\mu;\psi}_{m(\xi)}(\Omega)$. Então $\mathcal{A}(\phi) \in C^1\left(\mathcal{H}^{\varpi,\mu;\psi}_{m(\xi)}(\Omega), \mathbb{R}\right)$, $\langle \mathcal{A}'(\phi), v\rangle = \displaystyle\int_\Omega \left|\mathfrak{D}^{\varpi,\mu;\psi}_{0+}\phi\right|^{m(\xi)-2} \mathfrak{D}^{\varpi,\mu;\psi}_{0+}\phi\ \mathfrak{D}^{\varpi,\mu;\psi}_{0+}v\ d\xi$, para todo $\phi, v \in \mathcal{H}^{\varpi,\mu;\psi}_{m(\xi)}(\Omega)$ e $\mathcal{A}'$ é uma aplicação do tipo S_+, ou seja, $\phi_n \rightharpoonup \phi$ e $\limsup \langle \mathcal{A}'(\phi_n), \phi_n - \phi\rangle \leq 0$, implica $\phi_n \to \phi$ em $\mathcal{H}^{\varpi,\mu;\psi}_{m(\xi)}(\Omega)$.*

Definition 2.1. *Dizemos que $\phi \in \mathcal{H}^{\varpi,\mu;\psi}_{m(\xi)}(\Omega)$ é uma solução fraca do* **Problema** 1 *se*

$$\left(a - b\int_\Omega \frac{1}{m(\xi)} \left|\mathfrak{D}^{\varpi,\mu;\psi}_{0+}\phi\right|^{m(\xi)} d\xi\right) \int_\Omega \left|\mathfrak{D}^{\varpi,\mu;\psi}_{0+}\phi\right|^{m(\xi)-2}\ \mathfrak{D}^{\varpi,\mu;\psi}_{0+}\phi\ \mathfrak{D}^{\varpi,\mu;\psi}_{0+}\varphi\ d\xi$$
$$-\lambda \int_\Omega |\phi|^{m(\xi)-2}\ \phi\ \varphi\ d\xi = \int_\Omega g(\xi,\phi)\ \varphi\ d\xi,\ \varphi \in \mathcal{H}^{\varpi,\mu;\psi}_{m(\xi)}(\Omega).$$

O funcional energia $\mathbf{\Theta}^{\varpi,\mu}_{\psi} : \mathcal{H}^{\varpi,\mu;\psi}_{m(\xi)} \longrightarrow \mathbb{R}$ associado ao **Problema 1**

$$\begin{aligned} \mathbf{\Theta}^{\varpi,\mu}_{\psi}(\phi) &= a\int_\Omega \frac{1}{m(\xi)} \left|\mathfrak{D}^{\varpi,\mu;\psi}_{0+}\phi\right|^{m(\xi)} d\xi - \frac{b}{2}\left(\int_\Omega \frac{1}{m(\xi)} \left|\mathfrak{D}^{\varpi,\mu;\psi}_{0+}\phi\right|^{m(\xi)} d\xi\right)^2 \\ &- \lambda\int_\Omega \frac{1}{m(\xi)} |\phi|^{m(\xi)} d\xi - \int_\Omega \mathcal{G}(\xi,\phi) d\xi \end{aligned}$$

para todo $\phi \in \mathcal{H}^{\varpi,\mu;\psi}_{m(\xi)}(\Omega)$ está bem definido e é de classe C^1 em $\mathcal{H}^{\varpi,\mu;\psi}_{m(\xi)}(\Omega)$. Além disso, temos

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\mathbf{\Theta}^{\varpi,\mu}_{\psi}\right)'(\phi), \varphi \right\rangle &= \left(a - b\int_\Omega \frac{1}{m(\xi)} \left|\mathfrak{D}^{\varpi,\mu;\psi}_{0+}\phi\right|^{m(\xi)} d\xi\right) \int_\Omega \left|\mathfrak{D}^{\varpi,\mu;\psi}_{0+}\phi\right|^{m(\xi)-2} \mathfrak{D}^{\varpi,\mu;\psi}_{0+}\phi\ \mathfrak{D}^{\varpi,\mu;\psi}_{0+}\varphi d\xi \\ &- \lambda\int_\Omega |\phi|^{m(\xi)-2}\ \phi\ \varphi\ d\xi - \int_\Omega g(\xi,\phi)\varphi\ d\xi \end{aligned}$$

quaisquer que sejam $\phi, \varphi \in \mathcal{H}^{\varpi,\mu;\psi}_{m(\xi)}$. Assim, podemos observar que os pontos críticos do funcional $\mathbf{\Theta}^{\varpi,\mu}_{\psi}$ são as soluções fracas para o **Problema 1**. Para simplificar a apresentação, denotaremos a norma em $\mathcal{H}^{\varpi,\mu;\psi}_{m(\xi)}$ por $\|\cdot\|$ ao invés de $\|\phi\|_{\mathcal{H}^{\varpi,\mu;\psi}_{m(\xi)}}$.

3 Principais Resultados

Antes de investigar o principal resultado, vamos apresentar uma abordagem sobre condição de compacidade de Palais-Smale em $\mathcal{H}^{\varpi,\mu;\psi}_{m(\xi)}(\Omega)$.

Definition 3.1. *Seja $\left(\mathcal{H}^{\varpi,\mu;\psi}_{m(\xi)}(\Omega), \|\cdot\|\right)$ um espaço de Banach e $\mathbf{\Theta}^{\varpi,\mu}_{\psi} \in C^1(\mathcal{H}^{\varpi,\mu;\psi}_{m(\xi)}(\Omega))$. Dado $c \in \mathbb{R}$, dizemos que $\mathbf{\Theta}^{\varpi,\mu}_{\psi}$ satisfaz a condição de Palais–Smale no nível $c \in \mathbb{R}$ $(PS)_c$ se qualquer sequência $\{\phi_n\} \in \mathcal{H}^{\varpi,\mu;\psi}_{m(\xi)}(\Omega)$ satisfazendo*

$$\mathbf{\Theta}^{\varpi,\mu}_{\psi}(\phi_n) \longrightarrow c \ \text{e}\ \left(\mathbf{\Theta}^{\varpi,\mu}_{\psi}\right)'(\phi_n) \longrightarrow 0 \ \text{em}\ \left(\mathcal{H}^{\varpi,\mu;\psi}_{m(\xi)}(\Omega)\right)^* \ \text{se}\ n \longrightarrow \infty \tag{4}$$

tem uma subsequência convergente.

Lemma 3.1. *Se (g_1)-(g_3) valem. Então o funcional $\mathbf{\Theta}_{\psi}^{\varpi,\mu}$, satisfaz a condição $(PS)_c$, com $c < \dfrac{a^2}{2b}$.*

Demonstração. **Passo 1:** Vamos mostrar que $\{\phi_n\}$ é limitada em $\mathcal{H}_{m(\xi)}^{\varpi,\mu;\psi}(\Omega)$. Seja $\{\phi_n\} \subset \mathcal{H}_{m(\xi)}^{\varpi,\mu;\psi}(\Omega)$ uma sequência $(PS)_c$ tal que $c < \dfrac{a^2}{2b}$. A prova é feita para dois casos. No primeiro caso, para $\lambda \leq 0$, segue de (3) e (4) que ϕ_n é limitada em $\mathcal{H}_{m(\xi)}^{\varpi,\mu;\psi}(\Omega)$.

Faremos por contradição o caso $\lambda > 0$. Então, assumimos que, passando a uma subsequência ainda denotada por $\{\phi_n\}$, se necessário, temos $\|\phi_n\| \longrightarrow +\infty$ se $n \longrightarrow \infty$. Usando (4) e a condição (g_3), para n suficientemente grande, temos

$$C + \|\phi_n\| + \lambda C\left(\frac{\theta}{m^-} - 1\right)\|\phi_n\|^{m^+} \geq a\left(\frac{\theta}{m^+} - 1\right)\|\phi_n\|^{m^-} + b\left(\frac{-\theta}{2(m^-)^2} + \frac{1}{m^+}\right)\|\phi_n\|^{2m^-}.$$

Dividindo a desigualdade acima por $\|\phi_n\|^{m^+}$, levando em conta que vale (3) e passando ao limite com $n \longrightarrow \infty$, temos

$$\begin{aligned} &\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{C}{\|\phi_n\|^{m^+}} + \lim_{n\longrightarrow\infty} \|\phi_n\|^{1-m^+} + \lambda C\left(\frac{\theta}{m^-} - 1\right)\lim_{n\longrightarrow\infty} 1 \\ \geq\ & a\left(\frac{\theta}{m^+} - 1\right)\lim_{n\longrightarrow\infty}\|\phi_n\|^{m^- - m^+} + b\left(\frac{-\theta}{2(m^-)^2} + \frac{1}{m^+}\right)\lim_{n\longrightarrow\infty}\|\phi_n\|^{2m^- - m^+}, \end{aligned}$$

o que nos dá uma contradição. Segue então que ϕ_n é limitada em $\mathcal{H}_{m(\xi)}^{\varpi,\mu;\psi}(\Omega)$.

Passo 2: ϕ_n tem uma subsequência convergente em $\mathcal{H}_{m(\xi)}^{\varpi,\mu;\psi}(\Omega)$.

Da **Proposição 2.1** segue que a imersão $\mathcal{H}_{m(\xi)}^{\varpi,\mu;\psi}(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{L}^{s(\xi)}(\Omega)$ é compacta, onde $1 < s(\xi) < m_{\varpi}^*(\xi)$. Passando, se necessário a uma subsequência (sem perda de generalidade), existe $\phi \in \mathcal{H}_{m(\xi)}^{\varpi,\mu;\psi}(\Omega)$, tal que

$$\phi_n \rightharpoonup \phi \text{ em } \mathcal{H}_{m(\xi)}^{\varpi,\mu;\psi}(\Omega),\ \phi_n \to \phi \text{ em } \mathscr{L}^{s(\xi)}(\Omega),\ \phi_n(\xi) \to \phi(\xi) \text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{5}$$

Usando a desigualdade de Hölder e (5), temos que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_\Omega |\phi_n|^{m(\xi)-2}\phi_n(\phi_n - \phi)d\xi = 0. \tag{6}$$

Usando as condições (g_1) e (g_2), para todo $\epsilon \in (0,1)$, existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$|g(\xi,\phi_n)| \leq C_\epsilon(1 + |\phi_n|^{q(\xi)-1}) \leq \epsilon\,|\phi_n|^{m(\xi)-1} + C_\epsilon\,|\phi_n|^{q(\xi)-1}. \tag{7}$$

Usando (7) e **Proposição 2.1** segue que

$$\left|\int_\Omega g(\xi,\phi_n)\phi_n(\phi_n - \phi)d\xi\right| \ \leq\ \int_\Omega \epsilon\,|\phi_n|^{m(\xi)-1}|\phi_n - \phi|d\xi + \int_\Omega C_\epsilon\,|\phi_n|^{q(\xi)-1}|\phi_n - \phi|d\xi.$$

Usando a desigualdade de Hölder mais uma vez, e tomando o limite $n \longrightarrow \infty$ temos

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_\Omega g(\xi,\phi_n)(\phi_n - \phi)d\xi = 0. \tag{8}$$

Então, por (4) temos $\left\langle \left(\mathbf{\Theta}_{\psi}^{\varpi,\mu}\right)'(\phi_n), \phi_n - \phi \right\rangle \longrightarrow 0$. Portanto

$$\begin{aligned}&\left(a-b\int_{\Omega}\frac{1}{m(\xi)}\left|\mathfrak{D}_{0+}^{\varpi,\mu;\psi}\phi_n\right|^{m(\xi)}d\xi\right)\int_{\Omega}\left|\mathfrak{D}_{0+}^{\varpi,\mu;\psi}\phi_n\right|^{m(\xi)-2}\mathfrak{D}_{0+}^{\varpi,\mu;\psi}\phi_n\ \mathfrak{D}_{0+}^{\varpi,\mu;\psi}(\phi_n-\phi)d\xi\\ -\quad&\lambda\int_{\Omega}|\phi_n|^{m(\xi)}\ \phi_n\ (\phi_n-\phi)\ d\xi-\int_{\Omega}g(\xi,\phi_n)\ (\phi_n-\phi)\ d\xi\longrightarrow 0.\end{aligned}\tag{9}$$

Substituindo (6) e (8) em (9), temos

$$\left(a-b\int_{\Omega}\frac{1}{m(\xi)}\left|\mathfrak{D}_{0+}^{\varpi,\mu;\psi}\phi_n\right|^{m(\xi)}d\xi\right)\int_{\Omega}\left|\mathfrak{D}_{0+}^{\varpi,\mu;\psi}\phi_n\right|^{m(\xi)-2}\ \mathfrak{D}_{0+}^{\varpi,\mu;\psi}\phi_n\ \mathfrak{D}_{0+}^{\varpi,\mu;\psi}(\phi_n-\phi)d\xi\longrightarrow 0.\tag{10}$$

Como $\{\phi_n\}$ é limitada em $\mathcal{H}_{m(\xi)}^{\varpi,\mu;\psi}(\Omega)$ passando, se necessário a uma subsequência (sem perda de generalidade), podemos assumir que $\int_{\Omega}\frac{1}{m(\xi)}\left|\mathfrak{D}_{0+}^{\varpi,\mu;\psi}\phi_n\right|^{m(\xi)}d\xi\longrightarrow t_0\geq 0$ quando $n\longrightarrow\infty$.

Caso 1: Se $t_0 = 0$ então $\{\phi_n\}$ converge fortemente para $\phi = 0$ em $\mathcal{H}_{m(\xi)}^{\varpi,\mu;\psi}(\Omega)$ e a prova está terminada.

Caso 2: Se $t_0 > 0$ devemos considerar dois subcasos:

Subcaso 1: Se $t_0 \neq a/b$ então $a-b\int_{\Omega}\frac{1}{m(\xi)}\left|\mathfrak{D}_{0+}^{\varpi,\mu;\psi}\phi_n\right|^{m(\xi)}d\xi \nrightarrow 0$. Nesse sentido, não existe uma subsequência de $\left\{a-b\int_{\Omega}\frac{1}{m(\xi)}\left|\mathfrak{D}_{0+}^{\varpi,\mu;\psi}\phi_n\right|^{m(\xi)}d\xi\longrightarrow 0\right\}$ convergindo para zero. Portanto, existe $\delta > 0$ tal que $\left|a-b\int_{\Omega}\frac{1}{m(\xi)}\left|\mathfrak{D}_{0+}^{\varpi,\mu;\psi}\phi_n\right|^{m(\xi)}d\xi\right| > \delta > 0$, quando n é suficientemente grande. Então, é claro que $\left\{a-b\int_{\Omega}\frac{1}{m(\xi)}\left|\mathfrak{D}_{0+}^{\varpi,\mu;\psi}\phi_n\right|^{m(\xi)}d\xi\longrightarrow 0\right\}$ é limitada.

Subcaso 2: Se $t_0 = a/b$ então $a-b\int_{\Omega}\frac{1}{m(\xi)}\left|\mathfrak{D}_{0+}^{\varpi,\mu;\psi}\phi_n\right|^{m(\xi)}d\xi\longrightarrow 0$.

Definimos $\varphi(\phi) = \lambda\int_{\Omega}\frac{1}{m(\xi)}|\phi|^{m(\xi)}d\xi + \int_{\Omega}G(\xi,\phi)d\xi$, para todo $\phi\in\mathcal{H}_{m(\xi)}^{\varpi,\mu;\psi}(\Omega)$.

Então $\langle\varphi'(\phi), v\rangle = \lambda\int_{\Omega}|\phi|^{m(\xi)-2}\ \phi\, v\, d\xi - \int_{\Omega}g(\xi,\phi)\, v\, d\xi$ para todos $\phi, v\in\mathcal{H}_{m(\xi)}^{\varpi,\mu;\psi}(\Omega)$.

Segue que

$$\langle\varphi'(\phi_n)-\varphi'(\phi), v\rangle = \lambda\int_{\Omega}\left(|\phi_n|^{m(\xi)-2}\phi_n - |\phi|^{m(\xi)-2}\phi\right)v\, d\xi - \int_{\Omega}\left(g(\xi,\phi_n)-g(\xi,\phi)\right)v\, d\xi.$$

Para completar a prova, usaremos o seguinte lema.

Lemma 3.2. *Sejam $\phi_n,\ \phi\in\mathcal{H}_{m(\xi)}^{\varpi,\mu;\psi}(\Omega)$ tais que (5) vale. Então, passando a uma subsequência, se necessário, valem as seguintes propriedades:*

1. $\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_{\Omega}\left(|\phi_n|^{m(\xi)-2}\phi_n - |\phi|^{m(\xi)-2}\phi\right)v\, d\xi = 0;$

2. $\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_{\Omega}|g(\xi,\phi_n)-g(\xi,\phi)|\,|v|\, d\xi = 0;$

3. $\langle\varphi'(\phi_n)-\varphi'(\phi), v\rangle\longrightarrow 0,\ v\in\mathcal{H}_{m(\xi)}^{\varpi,\mu;\psi}(\Omega).$

Demonstração. De fato, usando (5), temos $\phi_n \longrightarrow \phi \in \mathscr{L}^{m(\xi)}(\Omega)$ o que implica que $|\phi_n|^{m(\xi)-2}\phi_n \longrightarrow |\phi|^{m(\xi)-2}\phi$ em $\mathscr{L}^{\frac{m(\xi)}{m(\xi)-1}}(\Omega)$. Usando a desigualdade de Hölder, segue que

$$\left|\int_\Omega \left(|\phi_n|^{m(\xi)-2}\phi_n - |\phi|^{m(\xi)-2}\phi\right) v d\xi\right| \leq C\left||\phi_n|^{m(\xi)-2}\phi_n - |\phi|^{m(\xi)-2}\phi\right|_{\frac{m(\xi)}{m(\xi)-1}} \|v\| \longrightarrow 0$$

quando $n \longrightarrow \infty$. Por outro lado, modifiando a prova acima, temos

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left||\phi_n|^{m(\xi)-2}\phi_n - |\phi|^{m(\xi)-2}\phi\right||v|d\xi \\ \leq &\int_\Omega \left[\epsilon\left(|\phi_n|^{m(\xi)-2}\phi_n - |\phi|^{m(\xi)-2}\right) + C_\epsilon\left(|\phi_n|^{q(\xi)-1} - |\phi|^{q(\xi)-1}\right)\right]|v|d\xi \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Finalmente, o **item 3** é a combinação dos itens **1** e **2**. Consequentemente,

$$\begin{aligned} \|\varphi'(\phi_n) - \varphi'(\phi)\|^{p'(\xi)}_{\left(\mathcal{H}^{\varpi,\mu;\psi}_{m(\xi)}(\Omega)\right)^*} &= \lambda\int_\Omega \left(|\phi_n|^{m(\xi)-2}\phi_n - |\phi|^{m(\xi)-2}\phi\right)(\varphi'(\phi_n) - \varphi'(\phi))\,d\xi \\ &- \int_\Omega (g(\xi,\phi_n) - g(\xi,\phi))(\varphi'(\phi_n) - \varphi'(\phi))\,d\xi \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

e $\varphi'(\phi_n) \longrightarrow \varphi'(\phi)$. □

Usando o **Lema 3.2**, temos

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\mathbf{\Theta}^{\varpi,\mu}_\psi\right)'(\phi), \phi\right\rangle &= \left(a - b\int_\Omega \frac{1}{m(\xi)}\left|\mathfrak{D}^{\varpi,\mu;\psi}_{0+}\phi\right|^{m(\xi)} d\xi\right)\int_\Omega \left|\mathfrak{D}^{\varpi,\mu;\psi}_{0+}\phi\right|^{m(\xi)-2}\mathfrak{D}^{\varpi,\mu;\psi}_{0+}\phi\, \mathfrak{D}^{\varpi,\mu;\psi}_{0+}\varphi d\xi \\ &- \langle\varphi'(\phi), v\rangle, \end{aligned}$$

$\left\langle \left(\mathbf{\Theta}^{\varpi,\mu}_\psi\right)'(\phi), \phi\right\rangle \longrightarrow 0$ e $\left(a - b\int_\Omega \frac{1}{m(\xi)}\left|\mathfrak{D}^{\varpi,\mu;\psi}_{0+}\phi\right|^{m(\xi)} d\xi\right) \longrightarrow 0$, temos $\varphi'(\phi_n) \longrightarrow 0$, $n \longrightarrow \infty$, ou seja, $\langle\varphi'(\phi), v\rangle = \lambda\int_\Omega |\phi|^{m(\xi)-2}\phi v\, d\xi + \int_\Omega g(\xi,\phi)v\, d\xi$, para todo $v \in \mathcal{H}^{\varpi,\mu;\psi}_{m(\xi)}(\Omega)$. Portanto, usando o lema fundamental do método variacional, temos $\lambda|\phi|^{m(\xi)-2}\phi(\xi) + g(\xi,\phi(\xi)) = 0$ para q.t. $\xi \in \Omega$. Segue que $\phi = 0$. Então

$$\varphi(\phi_n) = \lambda\int_\Omega \frac{1}{m(\xi)}|\phi_n|^{m(\xi)}d\xi + \int_\Omega \mathcal{G}(\xi,\phi_n)d\xi \to \lambda\int_\Omega \frac{1}{m(\xi)}|\phi|^{m(\xi)}d\xi + \int_\Omega \mathcal{G}(\xi,\phi)d\xi = 0. \tag{11}$$

Portanto, para $t_0 = a/b$, usando (11) e $\int_\Omega \frac{1}{m(\xi)}\left|\mathfrak{D}^{\varpi,\mu;\psi}_{0+}\phi_n\right|^{m(\xi)} d\xi \longrightarrow t_0 \geq 0$ se $n \longrightarrow \infty$, temos

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \mathbf{\Theta}^{\varpi,\mu}_\psi(\phi_n) = at_0 - \frac{b}{2}\frac{a^2}{b^2} - \lambda\int_\Omega \frac{1}{m(\xi)}|\phi|^{m(\xi)}d\xi - \int_\Omega \mathcal{G}(\xi,\phi)d\xi = \frac{a^2}{2b}.$$

Nesse sentido, temos $\mathbf{\Theta}^{\varpi,\mu}_\psi(\phi_n) \longrightarrow \frac{a^2}{2b}$ se $n \longrightarrow \infty$. Contradição, pois $\mathbf{\Theta}^{\varpi,\mu}_\psi(\phi_n) \longrightarrow c < \dfrac{a^2}{2b}$. Então $a - b\int_\Omega \frac{1}{m(\xi)}\left|\mathfrak{D}^{\varpi,\mu;\psi}_{0+}\phi_n\right|^{m(\xi)} d\xi \longrightarrow 0$ não é verdade e similarmente ao **Subcaso 1**, temos que $\left\{a - b\int_\Omega \frac{1}{m(\xi)}\left|\mathfrak{D}^{\varpi,\mu;\psi}_{0+}\phi_n\right|^{m(\xi)} d\xi \longrightarrow 0\right\}$ é limitada.

Segue dos casos acima que $\int_\Omega \left|\mathfrak{D}^{\varpi,\mu;\psi}_{0+}\phi_n\right|^{m(\xi)-2}\mathfrak{D}^{\varpi,\mu;\psi}_{0+}\phi_n\left(\mathfrak{D}^{\varpi,\mu;\psi}_{0+}\phi_n - \mathfrak{D}^{\varpi,\mu;\psi}_{0+}\phi\right)d\xi \longrightarrow 0$.

Invocando a condição S_+ (veja **Lema 2.1**) podemos deduzir que $\|\phi_n\| \longrightarrow \|\phi\|$ se $n \longrightarrow \infty$, que significa que $\mathbf{\Theta}^{\varpi,\mu}_\psi$ satisfaz a condição $(PS)_c$. □

Por fim, agora vamos concluir o trabalho, provando o principal resultado, o **Teorema** 1.1.

Lemma 3.3. *Assuma que g satisfaz (g_1) e (g_2). Então existem $\rho > 0$ e $\tilde{\varpi} > 0$ tais que $\mathbf{\Theta}_{\psi}^{\varpi,\mu}(\phi) \geq \tilde{\varpi} > 0$, para qualquer $\phi \in \mathcal{H}_{m(\xi)}^{\varpi,\mu;\psi}(\Omega)$ com $\|\phi\| = \rho$.*

Demonstração. Veja [3]. ☐

Lemma 3.4. *Assuma que g satisfaz (g_3). Então existe $e \in \mathcal{H}_{m(\xi)}^{\varpi,\mu;\psi}(\Omega)$ com $\|e\| \geq \rho$ onde ρ é dado pelo* **Lema 3.3** *tal que $\mathbf{\Theta}_{\psi}^{\varpi,\mu}(e) < 0$.*

Demonstração. Veja [3]. ☐

Demonstração. **(Prova do Teorema 1.1)**. Usando **Lemas 3.1-3.4** e pelo fato de que $\mathbf{\Theta}_{\psi}^{\varpi,\mu}(0) = 0$, o funcional energia $\mathbf{\Theta}_{\psi}^{\varpi,\mu}(\cdot)$ satisfaz o Teorema do Passo da Montanha. Portanto, **Problema 1** tem, de fato, uma solução fraca não trivial. ☐

4 Considerações Finais

Este trabalho é dedicado ao estudo da existência de soluções para uma nova classe de equações diferenciais fracionárias do tipo $m(\xi)$-Kirchhoff no espaço ψ-fracionário via **Lemas 3.1-3.4** e outras técnicas variacionais.

Referências

[1] V. Ambrosio, T. Isernia e V. D. Radulescu. "Concentration of positive solutions for a class of fractional p-Kirchhoff type equations". Em: **Proc. Royal Soc. Edinb. Sec.** 151.2 (2021), pp. 601–651.

[2] Z. Binlin, V. D. Rădulescu e L. Wang. "Existence results for Kirchhoff–type superlinear problems involving the fractional Laplacian". Em: **Proc. Royal Soc. Edinb. Sec.** 149.4 (2019), pp. 1061–1081.

[3] E. F. S. Feitosa, J. V. C. Sousa, S. I. Moreira e G. S. A. Costa. "Existence and multiplicity for fractional differential equations with $m(\xi)$-Kirchhoff type-equation". Em: **Computational and Applied Mathematics** (2024). Aceito.

[4] W. Rzymowski. "One-dimensional Kirchhoff equation". Em: **Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications** 48.2 (2002), pp. 209–221.

[5] J. V. C. Sousa, K. D. Kucche e J. J. Nieto. "Existence and Multiplicity of Solutions for Fractional $\kappa(\xi)$-Kirchhoff-Type Equation." Em: **Qual. Theory Dyn. Sys.** 23.1 (2024), p. 27.

[6] J. V. C. Sousa, M. Lamine e L. S. Tavares. "Generalized Telegraph Equation with Fractional $m(\xi)$-Laplacian." Em: **Minimax Theory and its Applications.** 08(2) (2023), pp. 423–441.

[7] J. V. C. Sousa e E. C. De Oliveira. "On the ψ-Hilfer fractional derivative." Em: **Commun. Nonlinear Sci.** 60 (2018), pp. 72–91.

[8] J. V. C. Sousa, J. Zuo e D. O'Regan. "The Nehari manifold for a ψ-Hilfer fractional p-Laplacian." Em: **Applicable Anal.** 101(14) (2022), pp. 5076–5106.

