Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Uma Relação entre Matrizes Tridiagonais por Blocos, Racionalidade de Funções Trigonométricas e Polinômios de Fibonacci

Adriano Verdério[1], Patrícia M. Kitani[2], Mari Sano[3]
DAMAT/UTFPR, Curitiba, PR
Izabele D'Agostin[4]
Colégio Estadual Tancredo de Almeida Neves, Curitiba, PR

Resumo. Neste trabalho estudamos uma matriz tridiagonal por blocos, que se relaciona com a solubilidade do jogo *Lights Out*. Mostramos que o determinante e os autovalores dessa matriz se relacionam com os polinômios de Fibonacci de uma forma natural. Essa relação também aparece ao estudar a solubilidade do jogo por outra perspectiva, por meio de um operador linear. A partir do estudo de uma soma de cossenos ser racional, conseguimos uma condição necessária e suficiente para que dois determinados polinômios de Fibonacci sejam primos entre si.

Palavras-chave. Matriz tridiagonal por blocos, polinômio de Fibonacci, jogo *Lights Out*

1 Introdução

Uma matriz tridiagonal por blocos é uma matriz quadrada em blocos que tem matrizes quadradas (blocos) na diagonal inferior, diagonal principal e diagonal superior, com todos os outros blocos sendo matrizes nulas. Essencialmente, é uma matriz tridiagonal, mas possui submatrizes no lugar de escalares. Uma matriz tridiagonal por blocos $M(m,n)$ tem a forma:

$$M(m,n) = \begin{bmatrix} B_1 & C_1 & & & \cdots & & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & & A_k & B_k & C_k & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & A_{m-1} & B_{m-1} & C_{m-1} \\ 0 & & \cdots & & & A_m & B_m \end{bmatrix}$$

onde A_{i+1} , B_k e C_i (para $1 \leq k \leq m$ e $1 \leq i \leq m-1$) são submatrizes quadradas de ordem n da diagonal inferior, principal e superior, respectivamente.

Aqui vamos considerar ainda um caso particular de uma matriz tridiagonal por blocos, onde: os blocos da diagonal principal são matrizes tridiagonais com as entradas não nulas iguais a 1; e os blocos das diagonais inferior e superior são matrizes identidades.

[1]verderio@utfpr.edu.br
[2]kitani@utfpr.edu.br
[3]marisano@utfpr.edu.br
[4]izadagostin@hotmail.com

Ou seja, uma matriz $M^*(m,n)$ da forma

$$M^*(m,n) = \overbrace{\begin{bmatrix} T_n & I_n & 0_n & \cdots & 0_n \\ I_n & T_n & I_n & \cdots & 0_n \\ 0_n & I_n & T_n & \cdots & 0_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_n & \cdots & I_n & T_n & I_n \\ 0_n & \cdots & 0_n & I_n & T_n \end{bmatrix}}^{m \text{ colunas de blocos}}$$

com m^2 blocos de ordem $n \times n$, formando uma matriz de ordem $mn \times mn$ onde T_n é a matriz tridiagonal mencionada anteriormente e I_n é a matriz identidade.

Por exemplo, se $m = 4$ e $n = 3$, a matriz será uma matriz de ordem 12 da seguinte forma:

$$M^*(4,3) = \begin{bmatrix} T_3 & I_3 & 0 & 0 \\ I_3 & T_3 & I_3 & 0 \\ 0 & I_3 & T_3 & I_3 \\ 0 & 0 & I_3 & T_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

A matriz $M^*(m,n)$ se relaciona com o jogo *Light Out* de configuração em m linhas e n colunas. Para maiores detalhes sugerimos [3].

Na segunda seção, mostramos a relação entre o determinante e os autovalores da matriz $M^*(m,n)$ com os polinômios de Fibonacci. Ainda, na terceira seção, apresentamos a matriz $M^*(m,n)$ como matriz de um operador linear.

2 O Determinante e a Inversibilidade de $M^*(m,n)$

Em [8], Molinari estuda o determinante de matrizes tridiagonais por blocos. Utilizando os resultados por ele desenvolvido, e com a notação apresentada anteriormente, concluímos que

$$\det(M^*(m,n)) = (-1)^{mn} \det(A_m),$$

onde A_m é o bloco de tamanho $n \times n$ do canto superior esquerdo da matriz Q^m, com

$$Q = \begin{bmatrix} -T_n & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}.$$

Em [10], Stănică e Stănică apresentam um estudo sobre a potência de matrizes em blocos, mostrando que se

$$R = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

então

$$R^m = \begin{bmatrix} A_m & B_m \\ C_m & D_m \end{bmatrix},$$

em que as submatrizes seguem as seguintes relações:

$$A_m = A \cdot A_{m-1} + B \cdot C_{m-1}, \qquad B_m = A \cdot B_{m-1} + B \cdot D_{m-1},$$

$$C_m = C \cdot A_{m-1} + D \cdot C_{m-1} \quad \text{e} \quad D_m = C \cdot B_{m-1} + D \cdot D_{m-1}.$$

Comparando, Q e R temos que $A_m = -T_n \cdot A_{m-1} - I_n \cdot C_{m-1}$, mas como $C_m = I_n \cdot A_{m-1} = A_{m-1}$, temos a relação de recorrência, $A_m = -T_n \cdot A_{m-1} - A_{m-2}$, para $m \geq 2$, em que $A_0 = I_n$ e $A_1 = -T_n$.

Se considerarmos a recorrência

$$p_m(x) = -xp_{m-1}(x) - p_{m-2}(x), \tag{1}$$

com $m \geq 2$ e $p_0(x) = 0$ e $p_1(x) = 1$, temos a primeira semelhança com os polinômios de Fibonacci, que são gerados pela recorrência $f_m(x) = xf_{m-1}(x) + f_{m-2}(x)$, com $m \geq 2$ [6, p. 4] e $f_0(x) = 0$ e $f_1(x) = 1$.

Vale notar também que os polinômios de Fibonacci e os polinômios solução da recorrência apresentada em (1) são gerados pelas potências das matrizes

$$\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} -x & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

respectivamente.

A Tabela 1 apresenta os 10 primeiros polinômios de Fibonacci e os 10 primeiros polinômios que são soluções da recorrência (1).

Tabela 1: Os polinômios $f_m(x)$ e $p_m(x)$, para $m = 1, 2, \cdots, 10$.

m	$f_m(x)$	$p_m(x)$
1	1	1
2	x	$-x$
3	x^2+1	x^2-1
4	x^3+2x	$-x^3+2x$
5	x^4+3x^2+1	x^4-3x^2+1
6	x^5+4x^3+3x	$-x^5+4x^3-3x$
7	$x^6+5x^4+6x^2+1$	$x^6-5x^4+6x^2-1$
8	$x^7+6x^5+10x^3+4x$	$-x^7+6x^5-10x^3+4x$
9	$x^8+7x^6+15x^4+10x^2+1$	$x^8-7x^6+15x^4-10x^2+1$
10	$x^9+8x^7+21x^5+20x^3+5x$	$-x^9+8x^7-21x^5+20x^3-5x$

A expressão geral para os polinômios de Fibonacci é

$$f_{m+1}(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \begin{pmatrix} m-i \\ i \end{pmatrix} x^{m-2i},$$

em que $\lfloor k \rfloor$ é a parte inteira de k [6, p. 16]. Já para a recorrência em (1) a expressão geral é

$$p_{m+1}(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (-1)^{m-i} \begin{pmatrix} m-i \\ i \end{pmatrix} x^{m-2i}.$$

Considerando a expressão geral para a recorrência em (1), reduzimos o trabalho de encontrar um determinante de uma matriz de ordem $mn \times mn$ para o determinante de um polinômio de uma matriz, $A_m = p_{m+1}(T_n)$ de ordem $n \times n$, a saber

$$\det(M^*(m,n)) = (-1)^{mn} \det \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (-1)^{m-i} \begin{pmatrix} m-i \\ i \end{pmatrix} (T_n)^{m-2i} \right).$$

Lembrando que o determinante de uma matriz é o produto de seus autovalores [7, p. 271] e utilizando o Teorema 7.7 apresentado por Graham em [4] (e reproduzido a seguir) podemos calcular o determinante de $p_{m+1}(T_n)$ considerando os autovalores de T_n.

Teorema 2.1. *Se uma matriz A de ordem $n \times n$ tem os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ e p é um polinômio, então os autovalores de $p(A)$ são $p(\lambda_1), p(\lambda_2), \ldots, p(\lambda_n)$.*

Portanto,

$$\det(M^*(m,n)) = (-1)^{mn} \prod_{i=1}^{m} p_{m+1}(\lambda_i),$$

onde λ_i são os autovalores de T_n.

De acordo com Noschese, Pasquini e Reichel, em [9], os autovalores de T_n são da forma

$$\lambda_j = 1 + 2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right) \qquad \text{para } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Considerando que

$$\cos\left(\pi - \frac{k\pi}{m+1}\right) = \cos\pi \cos\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) + \operatorname{sen}\pi \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) = -\cos\left(\frac{k\pi}{m+1}\right),$$

também podemos escrever que os autovalores de T_n são da forma

$$\lambda_j = 1 - 2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right) \qquad \text{para } j = 1, 2, \ldots, n.$$

A partir disso, podemos inferir quando a matriz $M^*(m,n)$ é singular. Basta analisarmos quando um dos autovalores de T_n é raiz do polinômio

$$p_{m+1}(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (-1)^{m-i} \begin{pmatrix} m-i \\ i \end{pmatrix} x^{m-2i}.$$

Para encontrarmos as raízes de p_{m+1}, usamos as mesmas ideias de Hoggatt Jr. e Bicknell, em [5], para encontrar as raízes dos polinômios de Fibonacci.

Temos que o polinômio p_{m+1} é determinado pela recorrência $p_{m+1}(x) = -xp_m(x) - p_{m-1}(x)$, cuja equação característica é $y^2 + xy + 1 = 0$ e consequentemente as raízes são

$$\alpha = \frac{-x + \sqrt{x^2-4}}{2} \qquad \text{e} \qquad \beta = \frac{-x - \sqrt{x^2-4}}{2}.$$

A solução geral da recorrência é

$$p_{m+1}(x) = \frac{\alpha^{m+1} - \beta^{m+1}}{\alpha - \beta}.$$

Fazendo $x = 2\ \cosh z$, temos que

$$x^2 - 4 = 4\ \cosh^2 z - 4 = 4\left(\cosh^2 z - 1\right) = 4\ \text{senh}^2\, z.$$

Ou seja, $\sqrt{x^2-4} = 2\ |\,\text{senh}\, z|$. Considerando $\sqrt{x^2-4} = 2\ \text{senh}\, z$ obtemos

$$\alpha = \frac{-2\ \cosh z + 2\ \text{senh}\, z}{2} = -\cosh z + \text{senh}\, z \quad \text{e} \quad \beta = \frac{-2\ \cosh z - 2\ \text{senh}\, z}{2} = -\cosh z - \text{senh}\, z.$$

Como $\cosh z = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$ e $\text{senh}\, z = \frac{e^z-e^{-z}}{2}$, segue que

$$\alpha = -\frac{e^z+e^{-z}}{2} + \frac{e^z-e^{-z}}{2} = -e^{-z} \quad \text{e} \quad \beta = -\frac{e^z+e^{-z}}{2} - \frac{e^z-e^{-z}}{2} = -e^{z}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} p_{m+1}(x) &= \frac{(-e^{-z})^{m+1} - (-e^{z})^{m+1}}{-e^{-z}+e^{z}} = \frac{(-1)^{m+1}e^{-(m+1)z} - (-1)^{m+1}e^{(m+1)z}}{e^z - e^{-z}} \\ &= \frac{(-1)^m\left(e^{(m+1)z} - e^{-(m+1)z}\right)}{e^z - e^{-z}}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$p_{m+1}(x) = (-1)^m \frac{\text{senh}((m+1)z)}{\text{senh}\, z},$$

com $x = 2\ \cosh z$. Se $\sqrt{x^2-4} = -2\ \text{senh}\, z$ chegamos no mesmo resultado.

Assim, $p_{m+1}(x) = 0$ quando $\text{senh}((m+1)z) = 0$ e $\text{senh}\, z \neq 0$. Em [2, p. 110], Brown e Churchill mostram que as raízes de $\text{senh}\, z$ são $z = k\pi i$, para $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Logo, as raízes de $\text{senh}((m+1)z)$ são

$$z = \pm\frac{k\pi i}{m+1},\ \text{com}\ k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Como $\text{senh}\, z \neq 0$, excluímos das raízes encontradas para $k = 0$ e k múltiplo de $m+1$, e todas as que se repetem (quando consideradas como ângulos). Assim, obtemos as raízes

$$z = \pm\frac{k\pi i}{m+1},\ \text{com}\ k = 1, 2, \ldots, m.$$

Sendo $x = 2\cosh z$, as raízes de p_{m+1} são

$$x = 2\cosh\left(\pm\frac{k\pi i}{m+1}\right) = 2\cosh\left(\frac{k\pi i}{m+1}\right),\ \text{com}\ k = 1, 2, \ldots, m.$$

Por outro lado, $\cosh(iv) = \cos(v)$ [2, p. 109], então as raízes de p_{m+1} são

$$x = 2\cos\left(\frac{k\pi}{m+1}\right),\ \text{com}\ k = 1, 2, \ldots, m.$$

Desta forma, os autovalores de T_n são raízes de p_{m+1}, quando

$$2\cos\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) = 1 - 2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)$$

para algum $j = 1, 2, \ldots, n$ e algum $k = 1, 2, \ldots, m$.

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0503

Ou seja, a matriz $M^*(m,n)$ é singular quando

$$\cos\left(\frac{k\pi}{m+1}\right)+\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)=\frac{1}{2}$$

para algum $j=1,2,\ldots,n$ e algum $k=1,2,\ldots,m$.

Em [11], mostramos que a matriz $M^*(m,n)$ se relaciona com a solubilidade do jogo *Lights Out*, de modo que se a matriz $M^*(m,n)$ for invertível o jogo apresenta solução independente da configuração inicial. Ainda em [11], mostramos que

$$det(M^*(m,n))=\prod_{k=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}\left[1+2\left(\cos\left(\frac{k\pi}{m+1}\right)+\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)\right)\right],$$

uma vez que os autovalores de $M^*(m,n)$ são da forma

$$\lambda_{jk}=1+2\left[\cos\left(\frac{k\pi}{m+1}\right)+\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)\right]$$

com $k=1,2,\ldots,m$ e $j=1,2,\ldots,n$.

Para a analise dos autovalores de $M^*(m,n)$, em [11], utilizamos o produto e a soma de Kronecker. Aqui chegamos ao mesmo resultado por outro caminho.

3 $M^*(m,n)$ como Matriz de um Operador Linear

Em [1], Barua e Ramakrishnan fazem um estudo do operador linear $F(X)=T_mX+X(T_n-I_n)$ no espaço das matrizes de ordem $m\times n$, que também se relaciona com a solubilidade do jogo *Lights Out*. A $M^*(m,n)$ é a matriz do operador em relação a base canônica, formada pelas matrizes B_ℓ de ordem $m\times n$ tal que, se $\ell=n(i-1)+j$ então a entrada $b_{ij}=1$ e todas as demais são nulas.

Os autores, ainda em [1], mostram que X pertence ao núcleo de F se, e somente se, os vetores colunas de X satisfazem a recorrência $X_{(i)}=T_nX_{(i-1)}+X_{(i-2)}$, para $1<i\leq n$, com $X_{(0)}=0$ e $X_{(n+1)}=T_nX_{(n)}+X_{(n-1)}=0$.

Vale notar que a recorrência acima é a que gera os polinômios de Fibonacci, evidenciando novamente a relação. Barua e Ramakrishnan mostram que o polinômio característico de T_n é o polinômio Fibonacci $f_n(x)$. Adicionalmente a isso, eles mostram que o operador F é invertível se, e somente se, os polinômios de Fibonacci $f_m(x)$ e $f_n(x+1)$ são primos entre si. Ou equivalentemente se, e somente se, os polinômios de Fibonacci $f_m(x+1)$ e $f_n(x)$ são primos entre si.

Barua e Ramakrishnan, concluem que se m é ímpar e $n\equiv 2\ (mod\ 3)$ (ou vice-versa) então o operador F não é invertível e que se $m\equiv 4\ (mod\ 5)$ e $n\equiv 4\ (mod\ 5)$ então F não é invertível.

Em [11], conseguimos com uma análise nos autovalores de $M^*(m,n)$, concluir um resultado mais forte. Apresentado a seguir.

Teorema 3.1. *A matriz $M^*(m,n)$ é singular se, e somente se, vale uma das seguintes afirmações:*

1. $m\equiv 2\ (mod\ 3)$ *e* n *é ímpar.*
2. m *é ímpar e* $n\equiv 2\ (mod\ 3)$.
3. $m\equiv 4\ (mod\ 5)$ *e* $n\equiv 4\ (mod\ 5)$.

Como a (não) invertibilidade da matriz $M^*(m,n)$ está relacionada com a (não) invertibilidade do operador, temos que, se o operador F não é invertível, então valem as condições do teorema anterior.

A prova do Teorema 3.1 recai na racionalidade da soma de cossenos, uma vez que para a matriz ser singular um de seus autovalores precisa ser nulo. Ao estudarmos quando a soma

$$\cos\left(\frac{k\pi}{m+1}\right)+\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)$$

é racional, conseguimos restringir para o caso de ser igual a $\frac{1}{2}$, que anula um autovalor de $M^*(m,n)$, e o resultado encontrado é exatamente as condições apresentadas no Teorema 3.1.

4 Considerações Finais

Neste trabalho apresentamos um estudo do determinante e a invertibilidade de uma matriz tridiagonal por blocos. Tal estudo nos levou a uma relação com os polinômios de Fibonacci que nos permitiu concluir resultados interessantes. Comparando os resultados obtidos com estudos anteriores uma nova relação aparece, com a racionalidade da soma de cossenos. E com isso podemos afirmar uma condição necessária e suficiente para que determinados polinômios de Fibonacci sejam coprimos.

Referências

[1] R. Barua e S. Ramakrishnan. "σ-game, σ^+-game and two-dimensional additive cellular automata". Em: **Theoretical Computer Science** 154.2 (1996), pp. 349–366. DOI: 10.1016/0304-3975(95)00091-7.

[2] J. W. Brown e R. V. Churchill. **Complex Variables and Applications**. 9a. ed. New York, New York: McGraw-Hill Professional, 2014. ISBN: 9780073383170.

[3] I. D'Agostin. "Aplicações de Álgebra Linear". Dissertação de mestrado. UTFPR, 2020.

[4] A. Graham. **Matrix Theory and Applications for Scientists and Engineers**. Mineola, New York: Dover Publications, 2018. ISBN: 9780486824192.

[5] V. E. Hoggatt Jr. e M. Bicknell. "Roots of Fibonacci Polynomials". Em: **The Fibonacci Quarterly** 11.3 (1973), pp. 271–274. URL: https://www.fq.math.ca/11-3.html.

[6] T. Koshy. **Fibonacci and Lucas Numbers with Applications**. Vol. 2. Hoboken, New Jersey: John Wiley e Sons, 2019. ISBN: 9781118742082.

[7] S. J. Leon. **Álgebra Linear Com Aplicações**. 8a. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014. ISBN: 9788521617693.

[8] L. G. Molinari. "Determinants of block tridiagonal matrices". Em: **Linear Algebra and its Applications** 429.8–9 (2008), pp. 2221–2226. DOI: 10.1016/j.laa.2008.06.015.

[9] S. Noschese, L. Pasquini e L. Reichel. "Tridiagonal Toeplitz matrices: properties and novel applications". Em: **Numerical Linear Algebra with Applications** 20.2 (2013), pp. 302–326. DOI: https://doi.org/10.1002/nla.1811.

[10] G. Stănică e P. Stănică. "Recurrences for entries of powers of matrices". Em: **The Fibonacci Quarterly** 55.5 (2017), pp. 166–173. URL: https://www.fq.math.ca/Papers1/55-5/Stanica.pdf.

[11] A. Verdério, I. D'Agostin, M. Sano e P. M. Kitani. "Algumas luminescências sobre o jogo *Lights Out*". Em: **No prelo** (2024). DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2403.17967. URL: https://arxiv.org/pdf/2403.17967.

