Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Multiplicidade de Soluções para Equações Diferenciais Fracionárias do tipo $m(\xi)$-Kirchhoff

Everson F. S. Feitosa[1]
IMECC/UNICAMP, Campinas, SP
José V. C. Sousa[2]
DEMATI-UEMA, São Luís, MA

Resumo. Neste trabalho, primeiro investigamos a condição de compacidade de Palais-Smale do funcional $\mathbf{\Theta}_{\psi}^{\varpi,\mu}$ no espaço ψ-fracionário $\mathcal{H}_{m(\xi)}^{\varpi,\mu;\psi}(\Omega)$. Nesse sentido, através do teorema do Passo da Montanha e do teorema de Fountain, investigamos a multiplicidade de soluções fracas para uma nova classe de equações diferenciais fracionárias do tipo $m(\xi)$-Kirchhoff.

Palavras-chave. Multiplicidade, Problemas do Tipo $m(\xi)$-Kirchhoff, Soluções Fracas

1 Introdução e Motivação

Considere o operador $p(x)$-Laplaciano com expoente variável [3]

$$\Delta_{p(x)} = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(x)}\ \nabla u\right). \tag{1}$$

Observe que para $p(x) = p$, temos o caso clássico da teoria de p-Laplaciano [2]. Ao longo dos anos os operadores do tipo (1), têm chamado a atenção de pesquisadores para discutir questões de existência e multiplicidade, unicidade e regularidade de soluções utilizando técnicas variacionais, em particular, via teorema do Passo da Montanha e variedade de Nehari [1]. Vale destacar também a importância destes tipos de operadores em problemas de fluidos eletrorreológicos, processamento de imagens, mecânica não newtoniana, medicina, economia, ecologia e outras áreas envolvidas [6]. Uma classe de problemas que merece atenção especial são os do tipo difusivo. O movimento de fluidos e o estudo de meios porosos (líquidos e gases) são amplamente investigados no estudo de problemas de difusão e convecção respectivamente [13] e suas referências.

Por outro lado, os problemas fracionários não locais com infinitas soluções têm chamado muita atenção nos últimos anos. Os operadores fracionários têm aplicações em diversas áreas, como matemática financeira, mecânica quântica, ondas de água, transição de fase, superfícies mínimas, dinâmica populacional, controle ótimo, teoria dos jogos, processos de Lévy na teoria das probabilidades, entre outras. Para mais detalhes sobre esses assuntos, veja [5] e suas referências. Existem alguns tipos de operadores fracionários que são usados para discutir problemas $p(x)$-Laplaciano com equações do tipo Kirchhoff [4].

Motivados pelos trabalhos acima, neste presente trabalho, vamos considerar uma nova classe de problemas fracionários não locais do tipo $m(\xi)$-Kirchhoff dado por

$$\begin{cases} \mathcal{M}(t)\mathfrak{D}_{T}^{\varpi,\mu;\psi}\left(\left|\mathfrak{D}_{0+}^{\varpi,\mu;\psi}\phi\right|^{m(\xi)-2}\mathfrak{D}_{0+}^{\varpi,\mu;\psi}\phi\right) = \lambda|\phi|^{m(\xi)-2}\phi + g(\xi,\phi) & \text{em} \quad \Omega \\ \phi = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega \end{cases}, \tag{2}$$

[1]everson.feitosa@ufape.edu.br
[2]vanterler@ime.unicamp.br

onde

$$\mathcal{M}(t) := a - b\int_{\Omega} \frac{1}{m(\xi)} \left|\mathfrak{D}_{0+}^{\varpi,\mu;\psi}\phi\right|^{m(\xi)} d\xi, \quad a \geqslant b > 0 \tag{3}$$

com a e b constantes, $\Omega := (0,T) \times (0,T)$ domínio limitado suave, $m \in C(\bar{\Omega})$, λ parâmetro real e g função contínua. Além disso, $\mathfrak{D}_{T}^{\varpi,\mu;\psi}(\cdot)$ e $\mathfrak{D}_{0+}^{\varpi,\mu;\psi}(\cdot)$ são as derivadas parciais fracionárias ψ-Hilfer à direita e à esquerda de ordem $0 < \varpi < 1$ e tipo $0 \leq \mu \leq 1$, respectivamente e $\varpi m(\xi) < 2$.

Suponha que a não linearidade $g(\xi, t) \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ satisfaz as seguintes condições:

(g_1) condição de crescimento subcrítico $|g(\xi, s)| \leq C(1 + |s|^{q(\xi)-1})$, para todo $(\xi, s) \in \Omega \times \mathbb{R}$, onde $C > 0$ e $m(\xi) < q(\xi) < m^*(\xi) = \frac{2m(\xi)}{2-\varpi m(\xi)}$;

(g_2) $\lim_{s\to 0} \frac{g(\xi,s)}{|s|^{m(\xi)-2}s} = 0$;

(g_3) existem $s_A > 0$ e $\theta \in \left(m^+, \frac{2(m^-)^2}{m^+}\right)$ tal que $0 < \theta\mathcal{G}(\xi, s) \leq sg(\xi, s)$, para todo $|s| \geq s_A$, $\xi \in \Omega$, onde $\mathcal{G}(\xi, s) = \displaystyle\int_0^s g(\xi, t)dt$;

(g_4) $g(\xi, -s) = -g(\xi, s)$ para todo $(\xi, s) \in \Omega \times \mathbb{R}$.

O principal objetivo deste trabalho é investigar a prova do seguinte teorema:

Theorem 1.1. *Suponha que a função $q \in C(\bar{\Omega})$ satisfaça*

$$1 < m^- < m(\xi) < m^+ < 2m^- < q^- < q(\xi) < m^*(\xi). \tag{4}$$

Então, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$ e com as condições $(g_1) - (g_4)$ satisfeitas, o **Problema 2** *tem infinitas soluções $\{\phi_n\}$ com $I(\phi_n) \to \infty$ se $n \to \infty$.*

2 Operadores Fracionários e Estrutura Variacional

Seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^2$. Denote $C_+(\bar{\Omega}) = \{m(\xi); m(\xi) \in C(\bar{\Omega}), m(\xi) > 1$ para todo $\xi \in \bar{\Omega}\}$ e $m^- = \inf_\Omega m(\xi) \leq m(\xi) \leq m^+ = \sup_\Omega m(\xi) < 2$. Para qualquer $m \in C_+(\bar{\Omega})$, introduzimos o espaço de Lebesgue de expoente variável

$$\mathscr{L}^{m(\cdot)}(\Omega) = \left\{\phi; \phi \text{ é mensurável e } \int_\Omega |\phi(\xi)|^{m(\xi)} d\xi < \infty\right\}$$

dotado da norma de Luxemburgo

$$\|\phi\|_{\mathscr{L}^{m(\xi)}} = |\phi|_{m(\cdot)} = \inf\left\{\mu > 0 : \int_\Omega \left|\frac{\phi(\xi)}{\mu}\right|^{m(\xi)} d\xi \leq 1\right\}.$$

Sejam $0 < \varpi < 1$ e $0 \leq \mu \leq 1$. Seja também $\Lambda = I_1 \times I_2$ onde $I_1 = (0, L]$ e $I_2 = (0, T]$, com T, L constantes positivas. Considere também que $\psi(\cdot)$ seja uma função monótona, crescente e positiva em I_2, com derivada contínua $\psi'(\cdot)$ em I_2. Além disso, sejam $\phi, \psi \in C^n(\Lambda)$ duas funções tais que ψ é crescente e $\psi'(\xi_2) \neq 0$ com $\xi_2 \in I_2$. As derivadas fracionárias parciais ψ-Hilfer de $\phi \in AC^n(\Lambda)$ de ordem ϖ e tipo $0 \leq \mu \leq 1$, são definidas por [11, 12]

$$\mathfrak{D}_{0+}^{\varpi,\mu;\psi}\phi(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{I}_{0+}^{\mu(1-\varpi),\psi}\left(\frac{1}{\psi'(\xi_2)}\frac{\partial}{\partial\xi_2}\right)\mathbf{I}_{0+}^{(1-\mu)(1-\varpi),\psi}\phi(\xi_1, \xi_2)$$

e

$$\mathfrak{D}_{T}^{\varpi,\mu;\psi}\phi(\xi_1,\xi_2)=\mathbf{I}_{T}^{\mu(1-\varpi),\psi}\left(-\frac{1}{\psi'(\xi_2)}\frac{\partial}{\partial\xi_2}\right)\mathbf{I}_{T}^{(1-\mu)(1-\varpi),\psi}\phi(\xi_1,\xi_2),$$

com $\xi_1\in I_1$, onde $\mathbf{I}_{0+}^{\varpi,\psi}\phi(\xi_1,\xi_2)$ e $\mathbf{I}_{T}^{\varpi,\psi}\phi(\xi_1,\xi_2)$ são as integrais fracionárias ψ-Riemann-Liouville de $\phi\in\mathscr{L}^1(\Lambda)$ de ordem ϖ $(0<\varpi<1)$ [11, 12].

O espaço ψ-fracionário com expoente variável é definido por [9, 10] como

$$\mathcal{H}_{m(\xi)}^{\varpi,\mu;\psi}(\Omega)=\left\{\phi:\Omega\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R};\phi\in\mathscr{L}^{m(\cdot)}(\Omega),\left|\mathfrak{D}_{0+}^{\varpi,\mu;\psi}\phi\right|\in\mathscr{L}^{m(\cdot)}(\Omega)\right\}$$

com norma

$$\|\phi\|_{\mathcal{H}_{m(\xi)}^{\varpi,\mu;\psi}}=\|\phi\|_{m(\xi)}+\left\|\mathfrak{D}_{0+}^{\varpi,\mu;\psi}\phi\right\|_{m(\xi)}.$$

Então $\mathcal{H}_{m(\xi),0}^{\varpi,\mu;\psi}(\Omega)$ é definido como o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ com respeito à norma $\|\phi\|_{\mathcal{H}_{m(\xi)}^{\varpi,\mu;\psi}}$. Nesse sentido, $\mathscr{L}^{m(\xi)}(\Omega)$, $\mathcal{H}_{m(\xi),0}^{\varpi,\mu;\psi}(\Omega)$ e $\mathcal{H}_{m(\xi)}^{\varpi,\mu;\psi}(\Omega)$ tornam-se Banach, separáveis e reflexivos [9, 10].

Proposição 2.1. [9, 10] *Para $m,q\in C_+(\bar{\Omega})$ tais que $1\leq q(\xi)\leq m_{\varpi}^*(\xi)$ para todo $\xi\in\bar{\Omega}$, existe uma imersão contínua $\mathcal{H}_{m(\xi)}^{\varpi,\mu;\psi}(\Omega)\hookrightarrow\mathscr{L}^{q(\xi)}(\Omega)$.*

Lemma 2.1. [14] *Suponha que $\phi_n,\phi\in\mathscr{L}^{m(\cdot)}$ e $m_-<+\infty$. Então, valem as seguintes propriedades:*

1. $|\phi|_{m(\cdot)}>1\Longrightarrow|\phi|_{m(\cdot)}^{m^-}\leq\rho_{m(\cdot)}(\phi)\leq|\phi|_{m(\cdot)}^{m^+}$;
2. $|\phi|_{m(\cdot)}<1\Longrightarrow|\phi|_{m(\cdot)}^{m^+}\leq\rho_{m(\cdot)}(\phi)\leq|\phi|_{m(\cdot)}^{m^-}$;
3. $|\phi|_{m(\cdot)}<1$ *(resp.* $=1;>1)\Longleftrightarrow\rho_{m(\cdot)}(\phi)<1;$ *(resp.* $=1;>1)$;
4. $|\phi_n|_{m(\cdot)}\to0$ *(resp.* $\to+\infty)\Longleftrightarrow\rho_{m(\cdot)}(\phi_n)\to0;$ *(resp.* $\to+\infty)$;
5. $\lim_{n\to\infty}|\phi_n-\phi|_{m(\cdot)}=0\Longleftrightarrow\lim_{n\to\infty}\rho_{m(\cdot)}(\phi_n-\phi)=0.$

Definition 2.1. *Dizemos que $\phi\in\mathcal{H}_{m(\xi)}^{\varpi,\mu;\psi}(\Omega)$ é uma solução fraca do* **Problema 2** *se*

$$\begin{aligned}\left(a-b\int_\Omega\frac{1}{m(\xi)}\left|\mathfrak{D}_{0+}^{\varpi,\mu;\psi}\phi\right|^{m(\xi)}d\xi\right)\int_\Omega\left|\mathfrak{D}_{0+}^{\varpi,\mu;\psi}\phi\right|^{m(\xi)-2}\ \mathfrak{D}_{0+}^{\varpi,\mu;\psi}\phi\ \mathfrak{D}_{0+}^{\varpi,\mu;\psi}\varphi\ d\xi\\ -\lambda\int_\Omega|\phi|^{m(\xi)-2}\ \phi\ \varphi\ d\xi=\int_\Omega g(\xi,\phi)\ \varphi\ d\xi\end{aligned}$$

onde $\varphi\in\mathcal{H}_{m(\xi)}^{\varpi,\mu;\psi}(\Omega)$.

O funcional energia $\mathbf{\Theta}_\psi^{\varpi,\mu}:\mathcal{H}_{m(\xi)}^{\varpi,\mu;\psi}\longrightarrow\mathbb{R}$ associado ao **Problema 2**

$$\begin{aligned}\mathbf{\Theta}_\psi^{\varpi,\mu}(\phi)&=a\int_\Omega\frac{1}{m(\xi)}\left|\mathfrak{D}_{0+}^{\varpi,\mu;\psi}\phi\right|^{m(\xi)}d\xi-\frac{b}{2}\left(\int_\Omega\frac{1}{m(\xi)}\left|\mathfrak{D}_{0+}^{\varpi,\mu;\psi}\phi\right|^{m(\xi)}d\xi\right)^2\\&-\lambda\int_\Omega\frac{1}{m(\xi)}|\phi|^{m(\xi)}d\xi-\int_\Omega\mathcal{G}(\xi,\phi)d\xi\end{aligned}$$

para todo $\phi \in \mathcal{H}^{\varpi,\mu;\psi}_{m(\xi)}(\Omega)$ está bem definido e é de classe C^1 em $\mathcal{H}^{\varpi,\mu;\psi}_{m(\xi)}(\Omega)$. Além disso, temos

$$\begin{aligned} &\left\langle \left(\mathbf{\Theta}^{\varpi,\mu}_{\psi}\right)'(\phi), \varphi \right\rangle \\ = &\left(a - b\int_\Omega \frac{1}{m(\xi)}\left|\mathfrak{D}^{\varpi,\mu;\psi}_{0+}\phi\right|^{m(\xi)} d\xi\right)\int_\Omega \left|\mathfrak{D}^{\varpi,\mu;\psi}_{0+}\phi\right|^{m(\xi)-2} \mathfrak{D}^{\varpi,\mu;\psi}_{0+}\phi \; \mathfrak{D}^{\varpi,\mu;\psi}_{0+}\varphi d\xi \\ - &\lambda \int_\Omega |\phi|^{m(\xi)-2} \; \phi \; \varphi \; d\xi - \int_\Omega g(\xi,\phi)\varphi \; d\xi \end{aligned}$$

quaisquer que sejam $\phi, \varphi \in \mathcal{H}^{\varpi,\mu;\psi}_{m(\xi)}$. Assim, podemos observar que os pontos críticos do funcional $\mathbf{\Theta}^{\varpi,\mu}_{\psi}$ são as soluções fracas para o **Problema 2**. Para simplificar a apresentação, denotaremos a norma em $\mathcal{H}^{\varpi,\mu;\psi}_{m(\xi)}$ por $\|\cdot\|$ no lugar de $\|\phi\|_{\mathcal{H}^{\varpi,\mu;\psi}_{m(\xi)}}$.

Theorem 2.1. [14][Teorema de Fountain] *Suponha que um dado funcional $\Phi \in C^1(\xi, \mathbb{R})$ satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c > 0$ e que exista $k_0 > 0$ tal que, para todo $k \geq k_0$ existe $\rho_k > r_k > 0$ de modo que as seguintes propriedades sejam válidas:*

(i) $a_k = \max\limits_{\phi \in Y_k,\ \|\phi\|=\rho_k} \Phi(\phi) \leq 0;$

(ii) $b_k = \inf\limits_{\phi \in Z_k,\ \|\phi\|=r_k} \Phi(\phi) \to +\infty$ *se* $k \to \infty$.

Então Φ tem uma sequência de pontos críticos $\{\phi_k\}$ tal que $\Phi(\phi_k) \to +\infty$.

A seguir, temos a condição de compacidade de Palais-Smale em $\mathcal{H}^{\varpi,\mu;\psi}_{m(\xi)}(\Omega)$.

Definition 2.2. *Seja $\left(\mathcal{H}^{\varpi,\mu;\psi}_{m(\xi)}(\Omega), \|\cdot\|\right)$ um espaço de Banach e $\mathbf{\Theta}^{\varpi,\mu}_{\psi} \in C^1(\mathcal{H}^{\varpi,\mu;\psi}_{m(\xi)}(\Omega))$. Dado $c \in \mathbb{R}$, dizemos que $\mathbf{\Theta}^{\varpi,\mu}_{\psi}$ satisfaz a condição de Palais–Smale no nível $c \in \mathbb{R}$ $(PS)_c$ se qualquer sequência $\{\phi_n\} \in \mathcal{H}^{\varpi,\mu;\psi}_{m(\xi)}(\Omega)$ satisfazendo*

$$\mathbf{\Theta}^{\varpi,\mu}_{\psi}(\phi_n) \longrightarrow c \;\; e \;\; \left(\mathbf{\Theta}^{\varpi,\mu}_{\psi}\right)'(\phi_n) \longrightarrow 0 \;\; em \;\; \left(\mathcal{H}^{\varpi,\mu;\psi}_{m(\xi)}(\Omega)\right)^* \;\; se \; n \longrightarrow \infty \tag{5}$$

tem uma subsequência convergente.

Lemma 2.2. *Se (g_1)-(g_3) valem. Então o funcional $\mathbf{\Theta}^{\varpi,\mu}_{\psi}$, satisfaz a condição $(PS)_c$, com $c < \dfrac{a^2}{2b}$.*

Demonstração. [8]. ☐

3 Multiplicidade de Soluções

Theorem 3.1. *Suponha que a função $q \in C(\bar{\Omega})$ satisfaça*

$$1 < m^- < m(\xi) < m^+ < 2m^- < q^- < q(\xi) < m^*(\xi). \tag{6}$$

Então, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ e com as condições $(g_1) - (g_3)$ satisfeitas, o **Problema 2** *tem uma solução fraca não trivial.*

Demonstração. Veja [7]. ☐

Vamos então provar o principal resultado deste trabalho. O **Teorema 1.1.**

Prova do Teorema 1.1. Pelo **Lema 2.2**, o funcional $\mathbf{\Theta}_{\psi}^{\varpi,\mu}(\cdot)$ satisfaz a condição $(PS)_c$ onde, precisamente $c < a^2/2b$. Agora vamos mostrar que $\mathbf{\Theta}_{\psi}^{\varpi,\mu}(\cdot)$ satisfaz as condições do Teorema de Fountain (**Teorema** 2.1) item por item.

(i) Por (g_3), existem $C_1 > 0$ e $M > 0$ tais que

$$\mathcal{G}(\xi, s) \geq C_1|s|^{\theta}, \text{ para todo } |s| \geq M, \xi \in \Omega. \tag{7}$$

Note que, por (g_1),

$$\begin{aligned} |\mathcal{G}(\xi, \phi)| &\leq \int_0^1 C(1 + |sz|^{q(\xi)-1})|s|dz \\ &\leq C|s| + C|s|^{q(\xi)}, \text{ para todo } (\xi, t) \in \Omega \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Portanto, se $|s| \leq M$ existe $C_2 > 0$ tal que

$$|\mathcal{G}(\xi, s)| \leq |s| \left(C + C|s|^{q(\xi)-1}\right) \leq C_2|s|.$$

Nesse sentido, usando (7), temos

$$\mathcal{G}(\xi, s) \geq C_1|s|^{\theta} - C_2|s|, \text{ para todo } (\xi, s) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Note que, para $\phi \in Y_k$ quando $\|\phi\| > 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{\Theta}_{\psi}^{\varpi,\mu}(\phi) &\leq a\int_{\Omega} \frac{1}{m(\xi)} \left|\mathfrak{D}_{0+}^{\varpi,\mu;\psi}\phi\right|^{m(\xi)} d\xi - \frac{b}{2}\left(\int_{\Omega} \frac{1}{m(\xi)} \left|\mathfrak{D}_{0+}^{\varpi,\mu;\psi}\phi\right|^{m(\xi)} d\xi\right)^2 \\ &- \lambda\int_{\Omega} \frac{1}{m(\xi)} |\phi|^{m(\xi)} d\xi - C_1\int_{\Omega} |\phi|^{\theta} d\xi + C_2\int_{\Omega} |\phi| d\xi. \end{aligned} \tag{8}$$

Consequentemente, pelo fato de que $\|\phi\| > 1$ e como todas as normas no espaço de dimensão finita Y_k são equivalentes, existe $C_W > 0$ tal que

$$\int_{\Omega} |\phi|^{m(\xi)} d\xi \geq C_W\|\phi\|^{m^-}, \int_{\Omega} |\phi|^{\theta} d\xi \geq C_W\|\phi\|^{\theta} \ e \ \int_{\Omega} |\phi| d\xi \geq C_W\|\phi\|. \tag{9}$$

Substituindo (9) em (8) e usando o **Lema 2.1**, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{\Theta}_{\psi}^{\varpi,\mu}(\phi) &\leq \frac{a}{m^-}\int_{\Omega} \left|\mathfrak{D}_{0+}^{\varpi,\mu;\psi}\phi\right|^{m(\xi)} d\xi - \frac{b}{2(m^+)^2}\left(\int_{\Omega} \left|\mathfrak{D}_{0+}^{\varpi,\mu;\psi}\phi\right|^{m(\xi)} d\xi\right)^2 \\ &- \frac{\lambda}{m^+}\int_{\Omega} |\phi|^{m(\xi)} d\xi - C_1\int_{\Omega} |\phi|^{\theta} d\xi + C_2\int_{\Omega} |\phi| d\xi. \\ &\leq \frac{a}{m^-}\|\phi\|^{m^+} - \frac{b}{2(m^+)^2}\|\phi\|^{2m^-} - \frac{C_W\lambda}{m^+}\|\phi\|^{m^-} - C_1C_W\|\phi\|^{\theta} + C_2C_W\|\phi\|. \end{aligned}$$

Como $\theta > 2m^- > m^+ > m^-$ segue que, para algum $\rho_k = \|\phi\| > 0$ suficientemente grande, podemos deduzir que

$$a_k \;=\; \max_{\phi \in Y_k,\ \|\phi\| = \rho_k} \mathbf{\Theta}_{\psi}^{\varpi,\mu}(\phi) \leq 0.$$

Portanto, a condição (i) do Teorema de Fountain (**Teorema** 2.1) é satisfeita.

(ii) Usando as condições (g_1) e (g_2), existe $C_3, C_4 > 0$ tal que

$$|\mathcal{G}(\xi,\phi)| \leq \frac{C_3}{m(\xi)}|\phi|^{m(\xi)} + \frac{C_4}{q(\xi)}|\phi|^{q(\xi)}. \tag{10}$$

Nesse sentido, para qualquer $\phi \in Z_k$ com $\|\phi\| \leq 1$. Usando a desigualdade (10), temos

$$\begin{aligned} \mathbf{\Theta}_{\psi}^{\varpi,\mu}(\phi) \quad \geq \quad & a\int_{\Omega} \frac{1}{m(\xi)} \left|\mathfrak{D}_{0+}^{\varpi,\mu;\psi}\phi\right|^{m(\xi)} d\xi - \frac{b}{2}\left(\int_{\Omega} \frac{1}{m(\xi)} \left|\mathfrak{D}_{0+}^{\varpi,\mu;\psi}\phi\right|^{m(\xi)} d\xi\right)^2 \\ - \quad & \int_{\Omega} \frac{\lambda}{m(\xi)} |\phi|^{m(\xi)} d\xi - \int_{\Omega} \frac{C_3}{m(\xi)}|\phi|^{m(\xi)} d\xi - \int_{\Omega} \frac{C_4}{q(\xi)}|\phi|^{q(\xi)} d\xi. \end{aligned} \tag{11}$$

Note que, de (6), temos $1/q(\xi) < 1/q^- < 1/m^+ < 1/m(\xi) < 1/m^-$ e usando o **Lema 2.1**, podemos escrever a desigualdade (11) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathbf{\Theta}_{\psi}^{\varpi,\mu}(\phi) \quad \geq \quad & \frac{a}{m^+}\int_{\Omega} \left|\mathfrak{D}_{0+}^{\varpi,\mu;\psi}\phi\right|^{m(\xi)} d\xi - \frac{b}{2(m^-)^2}\left(\int_{\Omega} \left|\mathfrak{D}_{0+}^{\varpi,\mu;\psi}\phi\right|^{m(\xi)} d\xi\right)^2 \\ - \quad & \frac{\lambda}{m^-}\int_{\Omega} |\phi|^{m(\xi)} d\xi - \frac{C_3}{m^-}\int_{\Omega} |\phi|^{m(\xi)} d\xi - \frac{C_4}{q^-}\int_{\Omega} |\phi|^{q(\xi)} d\xi \\ \geq \quad & \frac{a}{m^+}\|\phi\|^{m^+} - \frac{b}{2(m^-)^2}\|\phi\|^{2m^-} - \frac{(\lambda + C_3)\mu_k^{m^-}}{m^-}\|\phi\|^{m^-} - \frac{C_4\mu_k^{q^-}}{q^-}\|\phi\|^{q^-}. \end{aligned} \tag{12}$$

Seja $\varphi \in Z_k,\ \|\varphi\| = 1$, e $0 < t < 1$. Então, segue da desigualdade (12) que

$$\mathbf{\Theta}_{\psi}^{\varpi,\mu}(t\varphi) \quad \geq \quad \left(\frac{a}{m^+} - \frac{b}{2(m^-)^2}\right) t^{2m^-} - (\lambda + C_3)\frac{\mu_k^{m^-}}{m^-}t^{m^-} - \frac{C_4}{q^-}\mu_k^{q^-} t^{q^-}.$$

As condições $a \geq b$ e $m^+ < 2m^-$ implicam que

$$\left(\frac{a}{m^+} - \frac{b}{2(m^-)^2}\right) = \frac{2(m^-)^2 a - bm^+}{2(m^-)^2 m^+} > 0.$$

Daí obtemos

$$\mathbf{\Theta}_{\psi}^{\varpi,\mu}(t\varphi) \quad \geq \quad \left(\frac{2(m^-)^2 a - bm^+}{2(m^-)^2 m^+} - \frac{C_4}{q^-}\mu_k^{q^-}\right) t^{q^-} - (\lambda + C_3)\frac{\mu_k^{m^-}}{m^-}t^{m^-}.$$

Escolhendo $\frac{C_4}{q^-}\mu_k^{q^-} < \frac{2(m^-)^2 a - bm^+}{4(m^-)^2 m^+}$ e k suficientemente grande podemos escrever

$$\mathbf{\Theta}_{\psi}^{\varpi,\mu}(t\varphi) \quad \geq \quad t^{m^-}\left(\frac{2(m^-)^2 a - bm^+}{4(m^-)^2 m^+} t^{q^- - m^-} - (\lambda + C_3)\frac{\mu_k^{m^-}}{m^-}\right).$$

Escreva

$$\rho_k := \left(\frac{4(m^-)^2 m^+}{2(m^-)^2 a - bm^+}(\lambda + C_3)\frac{\mu_k^{m^-}}{m^-}\right)^{\frac{1}{q^- - m^-}}$$

Então, para k suficientemente grande, $\rho_k < 1$. Quando $t = \rho_k,\ \rho_k \in Z_k$ com $\|\varphi\| = 1$, temos $\mathbf{\Theta}_{\psi}^{\varpi,\mu}(t\varphi) \geq 0$. Portanto, a condição (ii) do Teorema de Fountain (**Teorema** 2.1) é válida. O que completa a demonstração.

$\square$

4 Considerações Finais

Este trabalho é dedicado ao estudo da multiplicidade de soluções para uma nova classe de equações diferenciais fracionárias do tipo $m(\xi)$-Kirchhoff no espaço ψ-fracionário via Teorema de Fountain (**Teorema** 2.1) e outras técnicas variacionais.

Referências

[1] G. A. Afrouzi e M. Mirzapour. "Eigenvalue problems for $p(x)$-Kirchhoff type equations". Em: **Electron. J. Differ. Equ.** 253 (2013), pp. 1–10.

[2] V. Ambrosio, T. Isernia e V. D. Radulescu. "Concentration of positive solutions for a class of fractional p-Kirchhoff type equations". Em: **Proc. Royal Soc. Edi. Sec.** 151.2 (2021), pp. 601–651.

[3] S. Antontsev, M. Chipot e Y. Xie. "Uniqueness results for equations of the $p(x)$-Laplacian type". Em: **Adv. Math. Sci. Appl.** 17.1 (2007), pp. 287–304.

[4] E. Azroul, A. Benkirane, M. Shimi e M. Srati. "On a class of fractional $p(x)$-Kirchhoff type problems". Em: **Applicable Anal.** 100.2 (2021), pp. 383–402.

[5] L. Caffarelli. "Non-local diffusions, drifts and games". Em: **Nonlinear Partial Diff. Equ.: The Abel Symposium 2010**. Springer. 2012, pp. 37–52.

[6] Y. Chen, S. Levine e M. Rao. "Variable exponent, linear growth functionals in image restoration". Em: **SIAM J. Appl. Math.** 66.4 (2006), pp. 1383–1406.

[7] E. F. S. Feitosa, J. V. C. Sousa, S. I. Moreira e G. S. A. Costa. "Existence and multiplicity for fractional differential equations with $m(\xi)$-Kirchhoff type-equation". Em: **Computational and Applied Mathematics** (2024). Aceito.

[8] M. K. Hamdani, A. Harrabi, F. Mtiri e D. D. Repovs. "Existence and multiplicity results for a new $p(x)$-Kirchhoff problem." Em: **Nonlinear Anal.** 190 (2020).

[9] J. V. C. Sousa, K. D. Kucche e J. J. Nieto. "Existence and Multiplicity of Solutions for Fractional $\kappa(\xi)$-Kirchhoff-Type Equation." Em: **Qual. Theory Dyn. Sys.** 23.1 (2024), p. 27.

[10] J. V. C. Sousa, M. Lamine e L. S. Tavares. "Generalized Telegraph Equation with Fractional $m(\xi)$-Laplacian." Em: **Minimax Theory and its Applications.** 08(2) (2023), pp. 423–441.

[11] J. V. C. Sousa e E. C. De Oliveira. "On the ψ-Hilfer fractional derivative." Em: **Commun. Nonlinear Sci.** 60 (2018), pp. 72–91.

[12] J. V. C. Sousa, J. Zuo e D. O'Regan. "The Nehari manifold for a ψ-Hilfer fractional p-Laplacian." Em: **Applicable Anal.** 101(14) (2022), pp. 5076–5106.

[13] J. L. Vázquez. **Smoothing and decay estimates for nonlinear diffusion equations: equations of porous medium type**. Vol. 33. OUP Oxford, 2006.

[14] M. Willem. "Minimax Theorems". Em: **Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications**. Ed. por Haim Brezis e Rutgers University. Vol. 24. Birkhauser Boston, Inc., 1996. DOI: 10.1007/978-1-4612-4146-1.

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0439