

Uma Técnica de Relaxação para Modelos do tipo Convecção-Difusão: Convergência da Onda Viajante

Eduardo Abreu¹

IMECC/UNICAMP, Campinas, SP

Wanderson Lambert²

ICT/UNIFAL, Poços de Caldas, MG

Erivaldo Lima³

DMAT/UFRR, Boa Vista, RR

PPGMA/IMECC/UNICAMP, Campinas, SP

Resumo. Neste trabalho, propõe-se um estudo da convergência da onda viajante, baseado em uma abordagem de relaxação aplicada a equações diferenciais parciais não lineares do tipo convecção-difusão na qual a mesma é reformulada em um sistema acoplado de leis de balanço hiperbólicas com termo de fonte singular. Para os problemas de Burgers e de Buckley-Leverett onde as ondas viajantes são admissíveis, mostramos formalmente que a onda viajante do problema relaxado converge para a onda viajante do problema original quando o parâmetro de relaxação tende a zero (situação de equilíbrio). Realizamos também experimentos numéricos para estes modelos evidenciando a convergência da onda viajante e mostrando a efetividade da abordagem analítico-numérica para a classe de modelos do tipo convecção-difusão.

Palavras-chave. Problemas de Convecção-difusão, Relaxação, Leis de balanço hiperbólicas, Onda viajante, abordagem analítico-numérica

1 Introdução

Técnicas de relaxação vêm sendo utilizadas há vários anos para modelagem e estabilização de soluções em sistemas de equações hiperbólicas [7–10].

Para problemas descritos por sistemas hiperbólicos gerais [5], sistemas triangulares 1D [4] e problemas dados por equações parabólicas do tipo convecção-difusão multidimensionais não-lineares degeneradas [1], a teoria geral é bastante complexa. Além disso, [2] e suas referências mostram como a solução numérica de sistemas hiperbólicos multidimensionais são difíceis de obter. Com estas motivações, em [3] os autores propuseram uma modelagem de relaxação eficaz para os modelos do tipo convecção-difusão não-lineares 1-dimensional

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial f(s)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon B(s) \frac{\partial d(s)}{\partial x} \right), & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ s(x, 0) = s_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1)$$

onde $s = s(x, t)$, ε é um parâmetro positivo e $B(s)$ é o termo difusivo que também é positivo. Além disso, assumimos que $\partial d / \partial s > 0$. Estas hipóteses são importantes porque elas representam

¹eabreu@unicamp.br

²wanderson.lambert@unifal-mg.edu.br

³erivaldo.lima@ufrr.br

a dissipação dos termos difusivos. Utilizando a técnica de relaxação proposta em [3], obtemos o seguinte sistema de lei de balanço acoplado nas variáveis s e w

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (f(s) - w) = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d(s)}{\alpha} \right) = \frac{w}{\varepsilon \alpha B(s)}, \end{cases} \quad (2)$$

onde α negativo é o parâmetro de relaxação.

Neste trabalho, vamos considerar a Equação (1) com a condição inicial

$$s_0(x) = \begin{cases} s_-, & \text{se } x < 0 \\ s_+, & \text{se } x > 0, \end{cases} \quad (3)$$

onde s_- e s_+ são devidamente escolhidos e a função f formula a equação de Burgers e a de Buckley-Leverett. O foco, aqui, é demonstrar que a onda viajante associada ao problema (2) converge para a onda viajante do problema original (1) quando o parâmetro de relaxação α tende a zero pela esquerda.

2 Equação de Burgers

Considere o Problema (1) com a função de fluxo $f(s) = s^2$ e a condição inicial (3) onde $s_- > s_+$. Primeiro vamos estudar a existência da onda viajante. Vamos procurar uma solução numa variável auto-similar η , ou seja, $s(x, t) = s(\eta)$ e $w(x, t) = w(\eta)$, com $\eta = \frac{x - \sigma t}{\varepsilon}$, onde σ é a velocidade de choque dada pela relação de Rankine-Hugoniot

$$s_+^2 - s_-^2 = \sigma(s_+ - s_-).$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{d}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{d}{d\eta}, \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{d}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \frac{d}{d\eta}. \end{aligned} \quad (4)$$

Substituindo $s = s(\eta)$ e $w = w(\eta)$ em (2), usando (4) e após algumas manipulações algébricas, obtemos o seguinte sistema de EDOs

$$\begin{aligned} -\sigma \frac{ds}{d\eta} + \frac{d}{d\eta} (s^2) &= \frac{dw}{d\eta}, \\ -\sigma \frac{dw}{d\eta} &= \frac{w}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \frac{ds}{d\eta}. \end{aligned} \quad (5)$$

Para soluções do tipo onda viajante, as condições

$$\lim_{\eta \rightarrow -\infty} s(\eta) = s_- \quad \text{e} \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} s(\eta) = s_+ \quad (6)$$

devem ser satisfeitas. Como $\lim_{\eta \rightarrow -\infty} s(\eta) = s_-$, então $\varepsilon \rightarrow 0$, conseqüentemente, $\lim_{\eta \rightarrow -\infty} w(\eta) = 0$.

Integrando a primeira equação do sistema (5) de $-\infty$ para η , i.e.,

$$\int_{-\infty}^{\eta} \frac{dw(\xi)}{d\xi} d\xi = -\sigma \int_{-\infty}^{\eta} \frac{ds(\xi)}{d\xi} d\xi + \int_{-\infty}^{\eta} \frac{ds(\xi)^2}{d\xi} d\xi,$$

obtemos a equação

$$w = -\sigma(s - s_-) + (s^2 - s_-^2). \quad (7)$$

Agora podemos obter uma equação para s aplicando a primeira equação do sistema (5) na segunda equação, juntamente com a equação (7), com isso obtendo a EDO

$$(\alpha\sigma(\sigma - 2s) + 1) \frac{ds}{d\eta} = -\sigma(s - s_-) + (s^2 - s_-^2). \quad (8)$$

Utilizando os operadores determinados em (5) obtemos a seguir a EDO relacionada ao problema original (1), i.e., a EDO

$$\frac{ds}{d\eta} = -\sigma(s - s_-) + (s^2 - s_-^2), \quad (9)$$

onde as condições em (6) também são satisfeitas.

Note aqui que queremos estudar o comportamento assintótico e provar que a solução do sistema (2) é estável e converge para a solução de (1) quando o tempo α vai a zero ou quando o tempo evolui para o infinito.

A equação (8) representa a variável s na onda viajante para o sistema (2) e a equação (9) representa variável s na onda viajante para a equação (1). Para facilitar nossa análise, vamos chamar a solução de (8) de s_1 e a solução de (9) de s_2 .

Das EDOs (8) e (9), obtemos, respectivamente,

$$\begin{cases} \frac{ds_1}{dt} = \frac{F(s_1)}{1 + \alpha g(s_1)} \\ s_1(0) = s_- \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \frac{ds_2}{dt} = F(s_2) \\ s_2(0) = s_-, \end{cases} \quad (10)$$

onde s_1 e s_2 são funções de t (aqui reformulamos nosso problema apenas para facilitar a análise, de modo que o domínio de integração será de 0 até $+\infty$ e chamamos essa variável reformulada de η como t), $F(s) = -\sigma(s - s_-) + (s^2 - s_-^2)$ and $g(s) = \sigma(\sigma - 2s)$. Note que F é uma função Lipschitz contínua. Logo,

$$\frac{d}{dt}(s_2 - s_1) = \frac{F(s_2) - F(s_1) + \alpha F(s_2)g(s_1)}{1 + \alpha g(s_1)}. \quad (11)$$

Pelo Teorema do Valor médio, existe um \bar{s} no domínio da função F tal que

$$\frac{d}{dt}(s_2 - s_1) = \frac{F'(\bar{s})(s_2 - s_1)}{1 + \alpha g(s_1)} + \frac{\alpha F(s_2)g(s_1)}{1 + \alpha g(s_1)}.$$

Aplicando o módulo na equação anterior, obtemos a desigualdade

$$\frac{d}{dt}|s_2 - s_1| \leq M_\alpha |s_2 - s_1| + |\alpha| C_\alpha, \quad (12)$$

onde,

$$M_\alpha = \max_{\bar{s}, s_1} \left| \frac{F'(\bar{s})}{1 + \alpha g(s_1)} \right| \quad e \quad C_\alpha = \max_{s_1, s_2} \left| \frac{F(s_2)g(s_1)}{1 + \alpha g(s_1)} \right|, \quad (13)$$

com α fixado. Seja $\mu = |s_2 - s_1|$ uma função dependente de t . Então, podemos reescrever a inequação(12) na forma

$$\frac{d\mu}{dt} \leq M_\alpha \mu + |\alpha| C_\alpha. \quad (14)$$

Logo, multiplicando (14) por $e^{-M_\alpha t}$, obtemos a inequação

$$\frac{d}{dt} (\mu e^{-M_\alpha t}) \leq |\alpha| C_\alpha e^{-M_\alpha t}. \tag{15}$$

Integrando (15) de 0 a η e como $\mu(0) = 0$, segue que

$$|s_2 - s_1| \leq |\alpha| C_\alpha \left(\frac{e^{M_\alpha t} - 1}{M_\alpha} \right). \tag{16}$$

Se $\alpha \rightarrow 0$ e $0 \leq t \leq T$, então C_α e M_α convergem e $|s_2 - s_1| \rightarrow 0$. Conseqüentemente, no limite, $s_1 = s_2$. Vejam as figuras 1, 2 e 3 a seguir ilustrando a convergência da onda viajante no caso da equação de Burgers, quando α tende a zero pela esquerda:

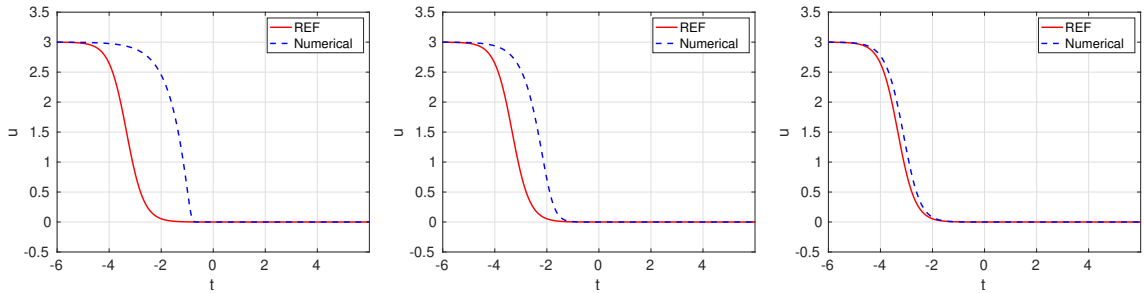


Figura 1: $\alpha = -0.1$. Fonte: dos autores. Figura 2: $\alpha = -0.05$. Fonte: dos autores. Figura 3: $\alpha = -0.01$. Fonte: dos autores.

Nas figuras 1, 2 e 3, o gráfico vermelho de referência representa a onda viajante do problema original enquanto os gráficos tracejados numéricos em azul representam as ondas viajantes da equação relaxada com os seus respectivos valores de α . Nestas simulações, utilizamos $s_- = 3$ e $s_+ = 0$.

3 Equação de Buckley-Leverett

Agora considere o problema (1) com a função de fluxo $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2(1 - s^2)}. \tag{17}$$

Na equação de Buckey-Leverett, a função de fluxo possui um único ponto de inflexão s_I , i.e, f é uma função não-convexa a qual sua derivada é dada por

$$f'(s) = \frac{4s(1 - s)}{(s^2 + 2(1 - s^2))^2} > 0, \tag{18}$$

para todo $s \in [0, 1]$. De acordo com [6], existem alguns casos para os estados iniciais s_- e s_+ onde a equação de Buckley-Leverett admite onda viajante, sendo um deles quando $s_+ < s_- \leq s_I$. Este é conhecido como o caso convexo, em que a função fluxo entre 0 e s_I herda as mesmas propriedades do caso Burgers.

De maneira análoga ao caso da equação de Burgers, obtemos a EDO:

$$\frac{ds}{d\eta} = -\sigma (s - s_-) + (f(s) - f(s_-)), \tag{19}$$

para o problema original e

$$(\alpha\sigma(\sigma - f'(s)) + 1) \frac{ds}{d\eta} = -\sigma(s - s_-) + (f(s) - f(s_-)), \quad (20)$$

para o problema relaxado. Das EDOs (19) e (20), respectivamente, temos

$$\begin{cases} \frac{ds_1}{dt} = \frac{F(s_1)}{1 + \alpha g(s_1)} \\ s_1(0) = s_- \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \frac{ds_2}{dt} = F(s_2) \\ s_2(0) = s_-, \end{cases} \quad (21)$$

onde s_1 e s_2 são funções de parâmetro t , $F(s) = -\sigma(s - s_-) + (f(s) - f(s_-))$ e $g(s) = \sigma(\sigma - f'(s))$. Para o caso convexo, a demonstração da convergência da onda viajante é similar ao caso de Burgers. As figuras 4, 5 e 6, mostram a convergência para o caso da equação de Buckley-Leverett convexo quando α tende a zero pela esquerda.

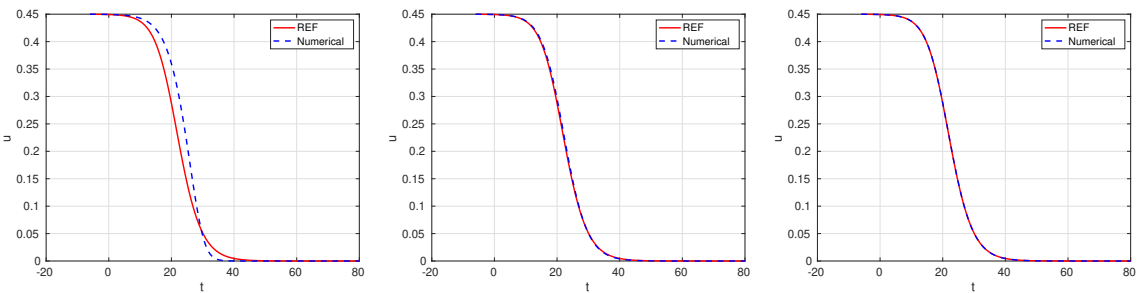


Figura 4: $\alpha = -10.0$. Fonte: dos autores. Figura 5: $\alpha = -1.0$. Fonte: dos autores. Figura 6: $\alpha = -0.1$. Fonte: dos autores.

Nas figuras 4, 5 e 6, o gráfico vermelho de referência representa a onda viajante do problema original enquanto os gráficos tracejados numéricos em azul representam as ondas viajantes da equação relaxada com os seus respectivos valores de α . Nestas simulações, utilizamos $s_- = 0.45$ e $s_+ = 0$.

4 Considerações Finais

Os resultados obtidos em [3] indicam que a técnica de relaxação utilizada é eficaz e pode ser aplicada em vários modelos. Neste trabalho, reforçamos a eficácia da técnica aplicando no estudo de ondas viajantes, mostrando-se bastante promissor o seu uso em problemas mais complexos. Observe que no caso de Burgers, conseguimos uma boa aproximação com o valor de α igual a -0.01 . No caso de Buckley-Leverett convexo, conseguimos uma convergência muito mais rápida do que no caso de Burgers, usando valores de α igual a -1.0 e -0.1 .

Agradecimentos

E. Abreu agradece o apoio financeiro recebido do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) (Processo nº 307641/2023-6) e da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) (Processo nº 2022/15108 -0).

Referências

- [1] E. Abreu, M. Colombeau e E. Y. Panov. “Approximation of entropy solutions to degenerate non-linear parabolic equations”. Em: **Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik** 68(6) (2017), pp. 1–17.
- [2] E. Abreu, J. François, W. Lambert e J. Pérez. “A Class of Positive Semi-discrete Lagrangian-Eulerian Schemes for Multidimensional Systems of Hyperbolic Conservation Laws.” Em: **Journal of Scientific Computing** 90 (2022), p. 40.
- [3] E. Abreu, A. Santo, W. Lambert e J. Pérez. “A relaxation approach to modeling properties of hyperbolic-parabolic type models”. Em: **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation** Available online 12 March 2024, 107967 (2024), 12 pages. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2024.107967>.
- [4] C. Bourdarias, A.-P. Choudhury, B. Guelmame e S. Junca. “Entropy Solutions in BV^s for a Class of Triangular Systems Involving a Transport Equation”. Em: **SIAM Journal on Mathematical Analysis** 54(1) (2022), pp. 791–817.
- [5] C. M. Dafermos. **Hyperbolic conservation laws in continuous physics**. 4a. ed. Springer, 2016.
- [6] E. L. Diniz. “O Problema de Riemann para um Modelo de Injeção de Polímero em Meio Poroso com Efeito de Adsorção”. Dissertação de mestrado. UFCG, 2015.
- [7] J. Hu, S. Jin e Q. Li. “Asymptotic-Preserving Schemes for Multiscale Hyperbolic and Kinetic Equations”. Em: **Handbook of Numerical Analysis** 18 (2017), pp. 103–129.
- [8] S. Jin, L. Pareschi e G. Toscani. “Diffusive Relaxation Schemes for Multiscale Discrete-Velocity Kinetic Equations”. Em: **SIAM Journal on Numerical Analysis** 35(6) (1998), pp. 2405–2439.
- [9] S. Jin e Z. Xin. “The Relaxation Schemes for Systems of Conservation Laws in Arbitrary Space Dimensions”. Em: **Comm. Pure Appl. Math** 48 (1995), pp. 235–276.
- [10] T. Liu. “Hyperbolic Conservation Laws with Relaxation”. Em: **Communications in Mathematical Physics** 108(1) (1987), pp. 153–175.