

Equação de Difusão Advecção com Condição de Von Neumann Variando no Tempo: Um estudo de Caso no Rio Tocantins, Imperatriz, MA

Gesivaldo dos S. Silva¹

IFMA, Carolina, MA

André Krindges²

ICET/UFMT, Cuiabá, MT

João Frederico da C. A. Meyer³

IMECC/UNICAMP, Campinas, SP

Resumo: A presente pesquisa é mais uma contribuição do grupo de Biomatemática da UNICAMP, em especial ao Grupo de Ecologia Matemática com foco em problemas de poluição e impactos ambientais. Esta pesquisa é um avanço no estudo de problemas de dispersão de poluentes com uso da Equação de Difusão-Advecção (equação do transporte) e Equação de Navier-Stokes, usando o Método dos Elementos Finitos. Nossa proposta estudou uma pluma de poluente em um trecho de 9km do rio Tocantins no Município de Imperatriz, Maranhão, Brasil, Localizado no sudoeste do estado. Em nível de doutorado, defendida e aprovada em agosto de 2022. Neste resumo, apresentaremos resultados das nossas simulações para um 4º cenário trabalhado com condições de fronteira variando no tempo para ingresso de poluentes, por ajustes de dados reais, fornecidos pela Defesa Civil do município de Imperatriz. Desta forma, foram gerados cenários, a partir dos quais foram possíveis a realização de análises e visualização de mapas, com avaliação de bom comportamento dos parâmetros, do código e da estabilidade numérica usando o Matlab 2019a.

Palavras-chave: EDP, Impactos Ambientais, Elementos Finitos, Simulações Numéricas

1 Introdução

Uma breve descrição do cenário onde adotamos como o domínio do nosso estudo. O rio Tocantins nasce nas proximidades de Brasília a mais de 1.000 metros de altitude e possui uma extensão de 2.416 km, distribuídos em um área de aproximadamente 803.200 km². O rio Tocantins atravessa 4 estados da Federação, em ordem: Goiás, Tocantins, Maranhão e Pará.

O Rio Tocantins no seu curso d'água banha vários municípios, entre eles o município de Imperatriz, MA. Que fica localizado no sudoeste do estado do Maranhão, a aproximadamente 630 km da capital São Luís, Maranhão.

2 Domínio em Estudo

A figura 1 ilustra a localização do trecho do Rio Tocantins, no município de Imperatriz, que definimos como nosso domínio (Região de Estudos), nesse trecho analisaremos os riachos poluídos que deságuam no rio.

¹gesivaldo.silva@ifma.edu.br

²krindges@ufmt.br

³joni@ime.unicamp.br

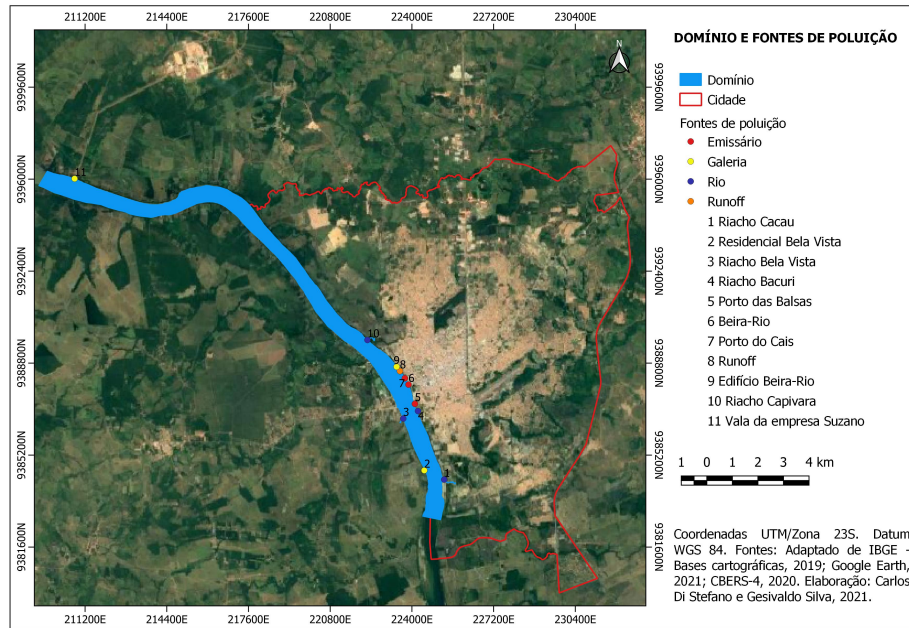


Figura 1: Ilustração do trecho, domínio de estudo, do Rio Tocantins no município de Imperatriz (MA) e indicações em vermelho dos riachos poluídos e emissários que daságuam no Tocantins. Fonte: Carlos Di Stefano e Gesivaldo Silva, 2021. [5]

3 Equações

O modelo clássico que usamos para modelarmos a dispersão de poluentes, considerando a concentração representada por $u(t, x, y)$ que trata da concentração do poluente no meio em estudo no ponto (x, y) no instante t , fundamentadas nas referências destacadas, dadas por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{Difusão} - \text{Transporte} - \text{Decaimento} + \text{Fonte} \quad (1)$$

onde:

$$\text{Difusão} = \nabla \cdot (\alpha_u \nabla u) : \text{Okubo (1980) [4].} \quad (2)$$

$$\text{Transporte} = \nabla \cdot (\vec{v}u) : \text{Edelstein-Keshet (1988), [2].} \quad (3)$$

$$\text{Decaimento} = \sigma_u u : \text{Marchuk (1986). [3].} \quad (4)$$

Após o acoplamento desses três fatores mencionados, a equação que modela o fenômeno da dispersão de um determinado poluente, em um domínio bidimensional, é:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (\alpha_u \nabla u) - \nabla \cdot (\vec{v}u) - \sigma_u u + f, \quad (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad t \in (0, T] \subset \mathbb{R}. \quad (5)$$

Desta forma, podemos simplificar nosso modelo, adotando o seguinte aspecto.

- $\alpha_u = \alpha_u(t, x, y)$ o coeficiente de difusibilidade efetiva no meio;
- $\vec{v} = \vec{v}(t, x, y) = (v_1(t, x, y), v_2(t, x, y))$ o campo de velocidade no meio nas respectivas direções;

- $\sigma_u = \sigma_u(t, x, y)$ coeficiente de decaimento do meio;
- $f = f(t, x, y)$ é o termo fonte de poluição.

Considerando como condição inicial o ponto: $u(0, x, y) = u_0(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$.

3.1 Condições de Contorno Von Neumann: Ingresso de Poluentes

- **Ingresso de Poluente:** Admitimos que a entrada de poluentes se dá através dos rios supracitados e também pela fronteira onde há agricultura *Runoff*. Porém, segundo [1] este ingresso pode dar-se num só ponto (como por exemplo um vazamento em duto), ou ao longo de toda uma parte do bordo (que é o que ocorre no fenômeno a deriva). Para este fenômeno utilizaremos uma condição do tipo Von Neumann não homogênea.

$$-\alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} |_{\Gamma_i} = \theta_i(t, x, y), \text{ onde } \theta_i \text{ é uma função na posição } (x, y) \text{ e no instante } t, \text{ sendo } i = 1, \dots, 11.$$

De forma breve, mostramos o que comentamos acima, conforme demonstrado em [5]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (\alpha_u \nabla u) - \nabla \cdot (\vec{v}u) - \sigma_u u + f, (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \ t \in (0, T] \subset \mathbb{R} \\ \nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} |_{\Gamma_1} = \theta_1(t, x, y), \ t \in (0, T] \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} |_{\Gamma_2} = \theta_2(t, x, y), \ t \in (0, T] \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} |_{\Gamma_3} = \theta_3(t, x, y), \ t \in (0, T] \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} |_{\Gamma_4} = \theta_4(t, x, y), \ t \in (0, T] \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} |_{\Gamma_5} = \theta_5(t, x, y), \ t \in (0, T] \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} |_{\Gamma_6} = \theta_6(t, x, y), \ t \in (0, T] \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} |_{\Gamma_7} = \theta_7(t, x, y), \ t \in (0, T] \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} |_{\Gamma_8} = \theta_8(t, x, y), \ t \in (0, T] \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} |_{\Gamma_9} = \theta_9(t, x, y), \ t \in (0, T] \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} |_{\Gamma_{10}} = \theta_{10}(t, x, y), \ t \in (0, T] \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} |_{\Gamma_{11}} = \theta_{11}(t, x, y), \ t \in (0, T] \end{array} \right. \tag{6}$$

Neste trabalho, faremos uma análise apenas das condições de contorno para ingresso de poluentes.

4 Cenário: Theta variando no tempo ($\theta(t)$)

No cenário, implementamos um código para inserirmos as funções θ variando no tempo. Na Figura 2, ilustramos um gráfico onde ajustamos os dados de picos de cheia e baixa do rio de acordo

com dados da Defesa Civil do Município de Imperatriz, Maranhão. Nesse gráfico ilustramos um ciclo de 1 ano, isto é 7300 iterações. As datas inseridas, foram reais e estão muito bem ajustadas ao gráfico, ou seja, o 16 de março de 2020 é um pico de cheia e o 29 de setembro 2020 baixa do rio, conforme dados de 2020 recebidos da Defesa Civil de imperatriz, Maranhão. As referidas datas em linguagem discreta no tempo foram alocadas como 1600 e 5400 iterações, conforme podem ser vistas na Figura 2.

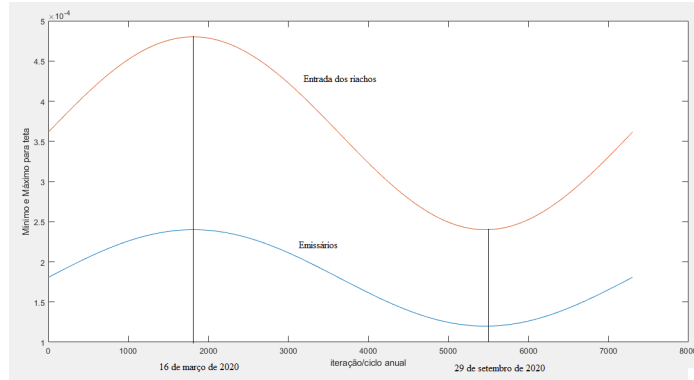


Figura 2: gráfico para o ciclo de 1 ano. Fonte: dos autores.

Os parâmetros usados para as simulações para o cenário, foram descritos na Tabela 1.

Tabela 1: Parâmetros das simulações para o cenário 4.

Parâmetros	Cenário 4	unidades	parâmetros	Cenário 4	unidades
dt	0.05	dia	Re	100	-
alpha (α)	0.24	km ² /dia	k ₁₂ (saída)	18 x 10 ⁻⁶	(km/dia)
sigma (σ)	24 x 10 ⁻⁶	1/dia	k ₁₃	18 x 10 ⁻⁶	(km/dia)

Fonte: dos autores

A equação que usamos para descrever o ciclo e ajustarmos aos dados reais foi uma função periódica do tipo cosseno (cossenoide), onde usamos dados para fluxo de entrada para theta mínimo e máximo em relação ao tempo.

$$\theta(t) = \left(\frac{\theta_{max} + \theta_{min}}{2} \right) + \left(\frac{\theta_{max} - \theta_{min}}{2} \right) \cdot \cos \left(\left(\frac{2\pi \cdot t}{360} \right) - \left(\frac{DM}{\frac{2\pi \cdot t}{360}} \right) \right) \quad (7)$$

onde DM é a data que introduzimos como sendo o pico da cheia conforme pode ser visto na Figura 2 que foi o 16 de março de 2020. As funções θ_{max} e θ_{min} indicam os intervalos para os dados de fluxo de entrada pelos riachos e emissários de poluição: $24 \cdot 10^{-5} \leq \theta \leq 48 \cdot 10^{-5}$ e $12 \cdot 10^{-5} \leq \theta \leq 24 \cdot 10^{-5}$; respectivamente.

Nesse cenário, trabalhamos até a iteração 1000 com o campo de velocidades simultaneamente com a Equação de Difusão - Advecção. Após essa iteração fixamos o campo de velocidades e avançamos até a iteração 36.500 que equivale a 5 anos.

Na Figura 3, temos o gráfico que representa o comportamento da concentração de poluente ao longo do tempo, com condições de fronteira variando também no tempo. Pela estrutura do gráfico, podemos visualizar o bom comportamento do mesmo em seu estado estacionário.

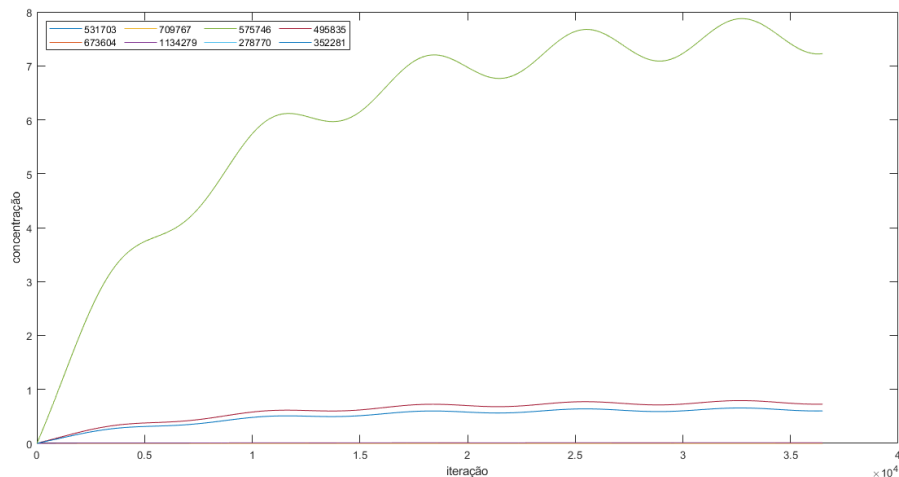


Figura 3: Concentração ao longo do tempo: theta variando. Fonte: dos autores.

5 Mapas de Dispersão da Concentração do Poluente

Na Figura 4 temos o mapa que mostra a evolução do poluente ao longo do tempo para um período de 1 ano com condições de fronteira variando no tempo.

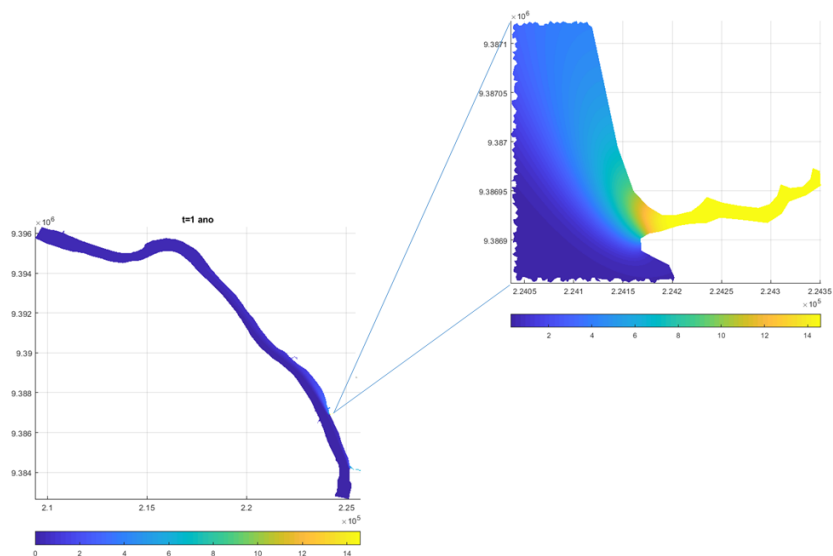


Figura 4: Mapa cenário 4 para 1 ano de dispersão. Fonte: dos autores.

Na Figura 5, temos o mapa que mostra a evolução do poluente ao longo do tempo para um período de 2 anos com condições de fronteira variando no tempo.

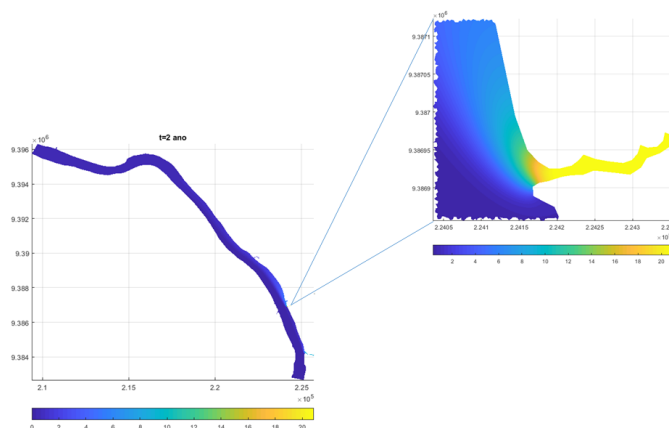


Figura 5: Mapa cenário 4 para 2 anos de dispersão. Fonte: dos autores.

Na Figura 6, temos o mapa que mostra a evolução do poluente ao longo do tempo para um período de 5 anos com condições de fronteira variando no tempo.

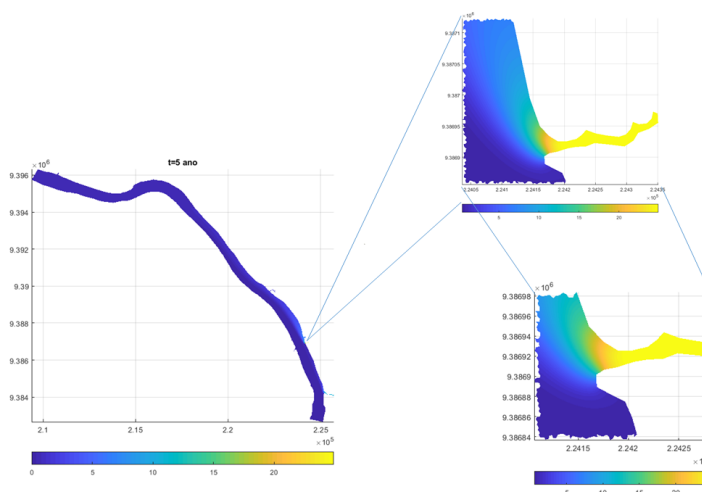


Figura 6: Mapa cenário 4 para 5 anos de dispersão. Fonte: dos autores.

Na Figura 7, mostramos um comparativo entre um resultado gerado com a nossa simulação para o cenário 4 e uma imagem de satélite. Embora a imagem de satélite tenha sido buscada fora dos parâmetros de escala e período em que definimos a região de estudo, ainda sim, nossos resultados numéricos aproximaram da realidade de uma forma coerente com as expectativas. Na imagem captada por satélite podemos enxergar uma mancha de poluente evoluindo pela margem direita do rio, e no caso para a simulação computacional também.

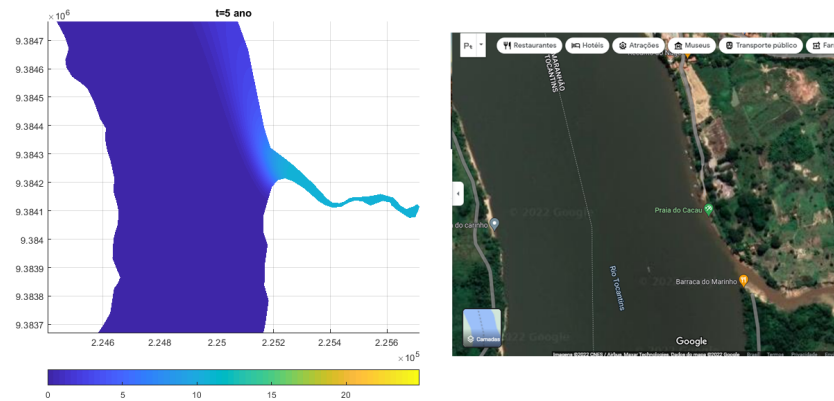


Figura 7: Comparação para validação/trecho riacho Cacau. Fonte: dos autores.

6 Considerações Finais

A referida pesquisa ressalta um estudo de caso onde trabalhamos com um domínio de 9 km do rio Tocantins, que banha o município de Imperatriz, Maranhão, Brasil. Considerando que nunca houve um trabalho dessa magnitude na região, nem explorado por demais pesquisadores da área, temos um trabalho inovador. O nosso código foi programado em paralelo para Equação de Difusão - Advecção, o que nos possibilita fazermos escolhas dos processadores. No cenário que apresentamos, tivemos uma condição de fronteira variando no tempo o que nos deu mais realismo ao modelo, levando em conta as particularidades da região. Portanto, podemos exaltar a robustez dos algoritmos, dos modelos, da discretização e simulações que evidenciaram nos resultados apresentados, bem como coerência e estabilidade para as particularidades do cenário criado. Em níveis ecológicos, podemos destacar o espalhamento da pluma de poluente e como essa se comporta a cada passo no tempo.

Referências

- [1] G. L. Diniz. “**Dispersão de Poluentes num Sistema ar-água: modelagem, aproximação e aplicações**”. Tese de doutorado. Doutorado em Engenharia Elétrica, FEEC-UNICAMP, Campinas, São Paulo, 2003.
- [2] L. Edelstein-Keshet. **Mathematical Models in Biology**. Random-House, New York. 1988. ISBN: 978-0-89871-554-5.
- [3] G. I. Marchuk. **Mathematical Models in Environmental Problems, Studies in Mathematical and its Applications**, vol. 16. 1986. ISBN: 978-0444879653.
- [4] A. Okubo. **Diffusion and Ecological Problems: Mathematical Models**, New York: Springer-Verlag. 1980. ISBN: 978-3540096207.
- [5] G. S. Silva. “**Modelagem, Aproximação Numérica e Simulação Computacional de Impacto Ambiental em Meio Fluvial: o Rio Tocantins no Município de Imperatriz (MA)**”. Tese de doutorado. IMECC-UNICAMP, Campinas, São Paulo, 2022.