Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Aplicação de Métodos Lagrangeano Aumentado a Problemas com Restrições do Tipo Complementaridade

Leonardo D. Secchin[1]
UFES, São Mateus, ES

Resumo. Dois problemas típicos na literatura são considerados: problemas de programação matemática com restrições de complementaridade (do inglês, MPCC) e problemas com restrição de cardinalidade (do inglês, MPCaC). Ambos não satisfazem a maioria das condições de qualificação estabelecidas, logo não há garantia de que métodos convirjam a pontos KKT. A convergência de métodos Lagrangeano aumentado (LA) clássicos em MPCCs foi considerada na literatura. Recentemente, um novo método LA para MPCCs com boa convergência teórica foi proposto e, mais tarde, estendido à MPCaCs. Embora similar à MPCC, MPCaCs são, de certa forma, menos degenerados, o que permite maior flexibilidade para confecção de algoritmos especializados. Neste trabalho destacamos avanços no estudo de MPCCs e MPCaCs, com ênfase em contribuições recentes do autor na convergência de um método LA de segunda ordem aplicado aos problemas considerados.

Palavras-chave. Lagrangeano aumentado. Segunda ordem. Restrições de complementaridade. Restrição de cardinalidade

1 Introdução

Este trabalho aborda os principais resultados obtidos pelo autor e colaboradores em [6, 14, 15], bem como proposta em andamento sobre o tema. Consideramos o problema de *programação matemática com restrições de complementaridade* (MPCC) dado por

$$\min_x f(x) \quad \text{s.a} \quad G(x) \leq 0,\ H(x) = 0,\ g(x) \geq 0,\ h(x) \geq 0,\ g(x)^T h(x) \leq 0. \tag{MPCC}$$

As últimas restrições dizem que, para cada i, $g_i(x) = 0$ ou $h_i(x) = 0$ em pontos viáveis, e dão nome ao modelo. Supomos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$, $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ e g, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de classe C^2.

MPCCs surgem em vários contextos, e a aplicação de diferentes métodos de otimização foi considerada. Consulte [6] para referências. (MPCC) pode ser visto como um problema de programação não linear padrão. No entanto apresenta alto grau de degeneração, pois a maioria das condições de qualificação (CQ) padrão não se verificam. Isso justifica o tratamento especial devotado na literatura. Em particular, o presente trabalho dedica-se à convergência de métodos Lagrangeano aumentado (LA) a MPCCs e ao seu problema correlato com restrição de cardinalidade.

Na seção 2 recuperamos os métodos LA Algencan [1] e Algencan-second [2], bem como conceitos fundamentais relacionados aos problemas considerados. Nas seções 3 e 4 apresentamos os principais resultados de convergência. Finalmente, a seção 5 traz as considerações finais.

Notação: Dado $z \in \mathbb{R}^n$, $(z)_+ = ((z_1)_+, \ldots, (z_n)_+)$ e $z_I = (z_{i_1}, \ldots, z_{i_r}) \in \mathbb{R}^r$ onde $I = \{i_1, \ldots, i_r\}$; ∇Q_I é a matriz cujas colunas são os gradientes das componentes de $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ com índices em I; $\{\epsilon_k\} \downarrow 0$ significa $\epsilon_k > 0$, $\forall k$, e $\lim_k \epsilon_k = 0$; $\operatorname{span} S$ é o espaço gerado pelo vetores de $S \subset \mathbb{R}^n$; $\lambda_{\min}(A)$ é o menor autovalor de A; $I_Q(z) = \{i \mid Q_i(z) = 0\}$; $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_\infty$ denotam as normas Euclideana e do máximo, respectivamente.

[1]leonardo.secchin@ufes.br

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0351

2 Preliminares

Consideremos o problema geral de programação não linear

$$\min_x f(x) \quad \text{s.a} \quad G(x) \leq 0, \quad H(x) = 0. \tag{P}$$

Para todos $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu = (\mu^G, \mu^H) \in \mathbb{R}^s_+ \times \mathbb{R}^q$ e $\rho > 0$ definimos a função *Lagrangeano* $L(x, \mu) = f(x) + (\mu^G)^T G(x) + (\mu^H)^T H(x)$, e a função *Lagrangeano aumentado*

$$L_\rho(x, \mu) = f(x) + \rho/2\big[\|(\mu^G/\rho + G(x))_+\|^2 + \|\mu^H/\rho + H(x)\|^2\big].$$

Um ponto viável x^* de (P) é KKT se existe um vetor de multiplicadores $\mu^* = (\mu^{G,*}, \mu^{H,*}) \in \mathbb{R}^s_+ \times \mathbb{R}^q$ tal que $\nabla_x L(x^*, \mu^*) = 0$ e $(\mu^{G,*})^T G(x^*) = 0$. Como é sabido, as condições KKT por si mesmas não formam uma condição necessária de otimalidade; para tanto é comum impor alguma CQ. Existem várias CQs na literatura, consulte [3] para uma visão geral.

2.1 Métodos LA para Problemas Gerais

Consideramos o "método LA de primeira ordem" Algencan [1], que é base para o "método LA de segunda ordem" Algencan-second [2]. Ambos consistem em resolver aproximadamente, a cada iteração,

$$\min_x L_\rho(x, \mu) \quad \text{s.a} \quad x \in \Omega \tag{1}$$

com ρ e μ fixos, e onde em Ω estão as restrições não penalizadas. Na prática, ambos os métodos são capazes de lidar com restrições de caixa em Ω (consulte [15] para detalhes), mas vamos supor $\Omega = \mathbb{R}^n$ por simplicidade. A diferença básica de Algencan-second para seu par de primeira ordem está na resolução de (1): enquanto a iteração de Algencan requer apenas pontos estacionários de primeira ordem de (1), em Algencan-second, o iterando x^k satisfaz adicionalmente uma condição necessária de segunda ordem aproximada, dada pela ε-Hessiana aproximada

$$\nabla^2_\varepsilon L_\rho(x, \mu) = \nabla^2_{xx} L(x, \tilde{\mu}) + \rho \sum_{i \in I_\varepsilon(x)} \nabla G_i(x) \nabla G_i(x)^T + \rho \sum_{i=1}^q \nabla H_i(x) \nabla H_i(x)^T$$

onde $\tilde{\mu}^G = (\mu^G + \rho G)_+$, $\tilde{\mu}^H = \mu^H + \rho H$ e $I_\varepsilon(x) = \{j \mid 1/\sqrt{\rho}(\mu^G_j + \rho G_j(x)) \geq -\varepsilon\}$. A relaxação na ativação das restrições de desigualdade em I_ε contorna o fato da Hessiana de L_ρ não estar definida se $(\mu^G_i + \rho G_i(x))_+ = 0$ para algum i. Para uma justificativa detalhada, consulte [2, 15].

Os métodos são apresentados no Algoritmo 1. No passo 1, x^k deve satisfazer uma condição de otimalidade aproximada para (1), de primeira ou segunda ordem. Podemos em tese utilizar qualquer método de otimização irrestrita (ou para minimização em caixas). Para os mais recentes resultados de convergência teórica do Algoritmo 1 para (P), consulte [3, 15].

2.2 Estacionaridade para MPCCs

Além da função Lagrangeano $L(x, \mu)$, consideramos a função *Lagrangeano-MPCC*

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = L(x, (\lambda, 0)) = f(x) + (\lambda^G)^T G(x) + (\lambda^H)^T H(x) - (\lambda^g)^T g(x) - (\lambda^h)^T h(x),$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda = (\lambda^G, \lambda^H, \lambda^g, \lambda^h) \in \mathbb{R}^s_+ \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{2m}$. Seja $I_0(x) = I_g(x) \cap I_h(x)$.

Definição 2.1 ([15, Definições 2.1 e 2.3])**.** *Um ponto viável x^* de* (MPCC) *é **fracamente estacionário** (W-estacionário) se existe $\lambda \in \mathbb{R}^s_+ \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{2m}$ tal que $\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda) = 0$, $\lambda^g_{I_h(x^*) \setminus I_g(x^*)} = 0$ e $\lambda^h_{I_g(x^*) \setminus I_h(x^*)} = 0$. Por sua vez, um ponto W-estacionário x^* é chamado **Clarke (C-)estacionário** se $\lambda^g_i \cdot \lambda^h_i \geq 0, \forall i \in I_0(x^*)$; **Mordukhovich (M-)estacionário** se $\lambda^g_i \cdot \lambda^h_i = 0$ ou $(\lambda^g_i, \lambda^h_i > 0)$, $\forall i \in I_0(x^*)$; e **fortemente estacionário** (S-estacionário) se $\lambda^g_i \geq 0$ e $\lambda^h_i \geq 0, \forall i \in I_0(x^*)$.*

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0351

Algorithm 1 ALGENCAN / ALGENCAN-SECOND

Sejam $\mu^G_{\max} > 0$, $\mu^H_{\min} < \mu^H_{\max}$, $\gamma > 1$, $0 < \tau < 1$ e $\{\varepsilon_k^{\text{grad}}\}, \{\varepsilon_k^{\text{hess}}\}, \{\varepsilon_k^{\text{fun}}\} \downarrow 0$. Sejam ainda $\mu^{G,1} \in [0, \mu^G_{\max}]^s$, $\mu^{H,1} \in [\mu^H_{\min}, \mu^H_{\max}]^q$ e $\rho_1 > 0$. Inicialize $k \leftarrow 1$.

Passo 1. Calcule x^k satisfazendo uma das condições

- $\|\nabla_x L_{\rho_k}(x^k, \mu^k)\| \leq \varepsilon_k^{\text{grad}}$ (ALGENCAN);
- $\|\nabla_x L_{\rho_k}(x^k, \mu^k)\| \leq \varepsilon_k^{\text{grad}}$ e $\lambda_{\min}(\nabla^2_{\varepsilon_k^{\text{fun}}} L_{\rho_k}(x^k, \mu^k)) \geq -\varepsilon_k^{\text{hess}}$ (ALGENCAN-SECOND).

Passo 2. Defina $V^k = \max\{G(x^k), -\mu^{G,k}/\rho_k\}$. Se $k > 1$ e $\max\{\|H(x^k)\|_\infty, \|V^k\|_\infty\} \leq \tau \max\{\|H(x^{k-1})\|_\infty, \|V^{k-1}\|_\infty\}$, defina $\rho_{k+1} = \rho_k$. Caso contrário, defina $\rho_{k+1} = \gamma\rho_k$.

Passo 3. Calcule $\mu^{G,k+1} \in [0, \mu^G_{\max}]^s$, $\mu^{H,k+1} \in [\mu^H_{\min}, \mu^H_{\max}]^q$, $k \leftarrow k+1$ e vá para o Passo 1.

Claramente S $\Rightarrow$ M $\Rightarrow$ C $\Rightarrow$ W-estacionaridade, mas as recíprocas não valem em geral [15]. Nenhum desses conceitos constitui uma condição otimalidade; CQs específicas para (MPCC) são definidas. No que segue, $\mathcal{S}(x, \mathcal{I}_G, \mathcal{I}_H, \mathcal{I}_g, \mathcal{I}_h) = \{\nabla G_{\mathcal{I}_G}(x), \nabla H_{\mathcal{I}_H}(x), \nabla g_{\mathcal{I}_g}(x), \nabla h_{\mathcal{I}_h}(x)\}$.

Definição 2.2 ([15, Definições 2.2 e 2.4])**.** *Seja x^* ponto viável de* (MPCC).

1. *x^* satisfaz a **CQ de independência linear dos gradientes das restrições ativas para MPCC** (do inglês, MPCC-LICQ) se o conjunto dos gradientes das restrições ativas em x^*, $\mathcal{S}(x^*, I_G(x^*), \{1, \ldots, q\}, I_g(x^*), \{1, \ldots, m\})$, é LI.*

2. *Sejam $\mathcal{I}_H \subset \{1, \ldots, q\}$, $\mathcal{I}_g \subset I_g(x^*) \backslash I_h(x^*)$ e $\mathcal{I}_h \subset I_h(x^*) \backslash I_g(x^*)$ tais que $\mathcal{S}(x^*, \emptyset, \mathcal{I}_H, \mathcal{I}_g, \mathcal{I}_h)$ constitua uma base para o subespaço $\operatorname{span} \mathcal{S}(x^*, \emptyset, \{1, \ldots, q\}, I_g \backslash I_h, I_h \backslash I_g)$. Dizemos que x^* satisfaz a **CQ de dependência linear positiva constante relaxada para MPCC** (do inglês, MPCC-RCPLD) se existir uma vizinhança $\mathcal{U}(x^*)$ de x^* tal que*

   - *$\operatorname{span} S(x, \emptyset, \{1, \ldots, q\}, I_g(x^*) \backslash I_h(x^*), I_h(x^*) \backslash I_g(x^*))$ tem o mesmo posto $\forall x \in \mathcal{U}(x^*)$;*
   - *para cada $\mathcal{I}_G \subset I_G(x^*)$ e $\mathcal{I}_g^0, \mathcal{I}_h^0 \subset I_0(x^*)$, se existirem $\lambda^G, \lambda^H, \lambda^g, \lambda^h$, não todos nulos, satisfazendo $\lambda^G_{\mathcal{I}_G} \geq 0$, $\lambda^h_i \lambda^g_i = 0$ ou $\lambda^h_i, \lambda^g_i > 0$ $\forall i \in I_0(x^*)$ e $\nabla G_{\mathcal{I}_G}(x^*)\lambda^G_{\mathcal{I}_G} + \nabla H_{\mathcal{I}_H}(x^*)\lambda^H_{\mathcal{I}_H} - \nabla g_{\mathcal{I}_g \cup \mathcal{I}_g^0}(x^*)\lambda^g_{\mathcal{I}_g \cup \mathcal{I}_g^0} - \nabla h_{\mathcal{I}_h \cup \mathcal{I}_h^0}(x^*)\lambda^h_{\mathcal{I}_h \cup \mathcal{I}_h^0} = 0$, então $S(x^*, \mathcal{I}_G, \mathcal{I}_H, \mathcal{I}_g \cup \mathcal{I}_g^0, \mathcal{I}_h \cup \mathcal{I}_h^0)$ é LD para todo $x \in \mathcal{U}(x^*)$.*

MPCC-LICQ implica estritamente MPCC-RCPLD, que por sua vez engloba o caso em que G, H, g e h são funções afins. Consulte [4] para uma descrição das CQs para MPCC.

É sabido que KKT para (MPCC) é equivalente à S-estacionaridade, e que este conceito pode não valer em minimizadores de (MPCC) mesmo quando G, H, g e h são afins (veja [15, Exemplo 2.5]). Por outro lado, minimizadores locais de (MPCC) são W/C/M-estacionários sob várias MPCC-CQs, como MPCC-LICQ e MPCC-RCPLD (veja [15, Teorema 2.4]).

2.3 Problemas com Restrição de Cardinalidade

Consideremos o problema

$$\min_x f(x) \quad \text{s.a} \quad G(x) \leq 0, \; H(x) = 0, \; \|x\|_0 \leq \alpha, \tag{2}$$

onde $0 < \alpha < n$ é um inteiro e $\|x\|_0$ é definido como a quantidade de coordenadas não nulas de x. A última restrição é chamada restrição de cardinalidade. Este problema possui aplicações em otimização de portfólio, *compressing sense*, dentre outras; veja [7, 12] e referências.

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0351

A pseudo-norma $\|\cdot\|_0$ não é uma função contínua, portanto, visando a aplicação de métodos de otimização tradicionais, é comum trabalhar com sua relaxação

$$\min_{x,y} f(x) \quad \text{s.a} \quad G(x) \leq 0,\ H(x) = 0,\ n - \mathbf{1}^T y \leq \alpha,\ y \leq \mathbf{1},\ x * y = 0, \tag{MPCaC}$$

onde $\mathbf{1}$ é o vetor n-dimensional de 1's e $x * y = (x_1y_1, \ldots, x_ny_n)$ é o produto de Hadamard entre x e y. Neste modelo, a variável auxiliar y visa contar as coordenadas nulas de x (note que $y_i > 0$ implica $x_i = 0$), que devem ser no mínimo em quantidade $n - \alpha$.

Minimizadores globais de (2) e (MPCaC) coincidem, mas o mesmo não ocorre entre minimizadores locais [8]. Apesar disso, pontos estacionários de (MPCaC) são considerados bons candidatos à solução de (2). O modelo (MPCaC) se assemelha à (MPCC) na medida em que possui as restrições $x_iy_i = 0$. Assim, o conceito de M-estacionaridade para MPCCs (Definição 2.1) é importado para o contexto de MPCaCs. De maneira similar, definimos a função *Lagrangeano-MPCaC*

$$\mathcal{L}^{\text{MPCaC}}(x, \lambda) = f(x) + (\lambda^G)^T G(x) + (\lambda^H)^T H(x) + (\lambda^c)^T x,$$

que é a função Lagrangeano usual para o *problema apertado* "$\min_x f(x)$ s.a. $G(x) \leq 0$, $H(x) = 0$, $x_i = 0, \forall i : x_i^* = 0$", obtido de (MPCaC) pela fixação de componentes nulas no ponto alvo x^*.

Definição 2.3. *Um ponto viável x^* de* (MPCaC) *é dito **M-estacionário** se existe $\lambda = (\lambda^G, \lambda^H, \lambda^c) \in \mathbb{R}^s_+ \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^n$ tal que $\nabla_x \mathcal{L}^{MPCaC}(x^*, \lambda) = 0$, $(\lambda^G)^T G(x^*) = 0$ e $\lambda^c * x^* = 0$.*

Ao contrário de MPCCs, M-estacionaridade é equivalente à KKT para (MPCaC) mediante um simples ajuste de y [12, Proposição 2.3], o que faz este conceito ser considerado o ideal no contexto de MPCaCs.

3 Convergência de LA em MPCCs

Em [10] foi mostrado que sob MPCC-LICQ, Algencan converge a pontos pelo menos C-estacionários. Mais ainda, quando certa sequência dual associada à complementaridade é limitada, então há convergência a pontos S-estacionários sob MPCC-LICQ [10, Teorema 3.2]. O teorema a seguir estende este último caso, mostrando que o mesmo vale sob MPCC-RCPLD.

Teorema 3.1 ([6, Teorema 3.1])**.** *Seja $\{x^k\}$ uma sequência gerada por Algencan e x^* um ponto de acumulação viável seu, digamos, $\lim_{k\in K} x^k = x^*$. Se a sequência de multiplicadores da complementaridade $\{(\mu^{0,k} + \rho_k g(x^k)^T h(x^k))_+\}_{k\in K}$ possui uma subsequência limitada e vale MPCC-RCPLD em x^*, então x^* é S-estacionário. Caso contrário, x^* é pelo menos C-estacionário desde que valha MPCC-LICQ.*

O teorema a seguir trata da convergência de Algencan-second em MPCCs. Nele utilizamos a notação de "grande O", comum em complexidade computacional.

Teorema 3.2 ([6, Teorema 3.2])**.** *Seja $\{x^k\}$ uma sequência gerada por Algencan-second e x^* um ponto de acumulação viável seu, digamos, $\lim_{k\in K} x^k = x^*$. Se $\{(\mu^{0,k} + \rho_k g(x^k)^T h(x^k))_+\}_{k\in K}$ possui uma subsequência limitada e vale MPCC-RCPLD em x^*, então x^* é S-estacionário. Caso contrário, se x^* satisfaz MPCC-LICQ e $\epsilon_k^{fun} = O(1/\sqrt{\rho_k})$ então este ponto é pelo menos M-estacionário.*

Os Teoremas 3.1 e 3.2 não podem ser estendidos a M e S-estacionários, respectivamente (veja os Exemplos 3.1 e 3.2 de [15]). É importante observar que o controle de velocidade do decaimento da precisão ϵ_k^{fun} exigida no Teorema 3.2 é implementável, já que ϵ_k^{fun} e ρ_k são definidos antes do passo 1 do Algoritmo 1. Informações de segunda ordem foram usadas anteriormente na literatura para obter convergência a pontos M-estacionários em outros métodos, consulte a seção 3 de [15].

Resultados Numéricos. ALGENCAN-SECOND foi implementado sobre a versão 3.0.0 beta de ALGENCAN (www.ime.usp.br/~egbirgin/tango). Consulte [6] e o capítulo 4 de [15] para a completa descrição das estratégias numéricas adotadas. Os testes foram realizados com problemas da coletânea MacMPEC (www.mcs.anl.gov/~leyffer/MacMPEC). Em linhas gerais, os métodos de primeira e segunda ordens comportaram-se de maneira muito semelhante. Em 3 problemas é possível observar que, enquanto ALGENCAN tende a atingir pontos apenas C-estacionários, ALGENCAN-SECOND atinge S-estacionários como a teoria sugere. Mais ainda, o método de segunda ordem "atingiu limites" melhores que ALGENCAN em outros dois problemas de médio porte.

Ainda que estratégias para mitigar o custo computacional de computações de segunda ordem tenham sido consideradas, seu tempo de execução é um gargalo. No entanto, uma estratégia alternativa [15] específica para MPCCs apresentou custo médio apenas 4% maior que o de ALGENCAN.

4 Convergência de LA em MPCaCs

Em [12, 13], a convergência global de ALGENCAN em (MPCaC) foi analisada, enquanto que em [14] a convergência de ALGENCAN-SECOND a pontos de segunda ordem foi estabelecida. Para tanto, um novo conceito de estacionaridade de segunda ordem adaptado à MPCaCs foi proposto: dado x^* viável, definimos o cone linearizado em x^*

$$\mathcal{T}_{\text{lin}}(x^*) = \{d \in \mathbb{R}^n \mid \nabla G_i(x^*)^T d \leq 0, i \in I_g(x^*),\ \nabla H(x^*)^T d = 0,\ d_i = 0, i \in I_0(x^*)\}.$$

Definição 4.1 ([14]). *Um ponto M-estacionário x^* para* (MPCaC) *é dito **estacionário fraco de segunda ordem** (do inglês, MPCaC-WSONC) se existe um multiplicador λ associado à x^* tal que $d^T \nabla^2_{xx} \mathcal{L}^{MPCaC}(x^*, \lambda) d \geq 0$, $\forall d \in \mathcal{C}^W(x^*) = \{d \in \mathcal{T}_{\text{lin}}(x^*) \mid \nabla G_i(\bar{x})^T d = 0,\ i \in I_g(x^*)\}$.*

A convergência de ALGENCAN-SECOND à pontos MPCaC-WSONC é apresentada no Teorema 4.1 sob uma adaptação da CQ de posto constante relaxado (do inglês, RCRCQ) para programação padrão. Note que enquanto ALGENCAN-SECOND converge somente a pontos estacionários de primeira ordem de (MPCC) (Teorema 3.2) – e não há outra expectativa [15] –, a convergência em (MPCaC) é, de fato, a pontos de segunda ordem. Isso indica que (MPCaC) é, de certa forma, mais próximo do modelo padrão (P) do que de (MPCC) em termos do nível de degeneração [14].

Definição 4.2 ([14]). *Dizemos que a **CQ de posto constante relaxado para MPCaC** (MPCaC-RCRCQ) vale no ponto viável x^* se, para todo $\mathcal{I} \subset I_g(x^*)$, os gradientes $\nabla g_i(x), i \in \mathcal{I}$, $\nabla h_j(x), j \in \{1, \ldots, p\}$, $e_i, i \in I_0(x^*)$ mantêm o posto em uma vizinhança de x^*.*

MPCaC-RCRCQ é uma CQ de segunda ordem, isto é, todo minimizador local de (MPCaC) é ponto MPCaC-WSONC [14]. O Algoritmo 1 gera uma sequência $\{y^k\}$, que possui subsequência limitada desde que $\{x^k\}$ a tenha [12, Proposição 4.1]. Logo, assumimos no teorema a seguir que $\{y^k\}$ possui ponto de acumulação.

Teorema 4.1 ([14]). *Seja $\{(x^k, y^k)\}$ uma sequência gerada por ALGENCAN-SECOND e (x^*, y^*) um ponto de acumulação viável para* (MPCaC). *Suponha que x^* satisfaça MPCaC-RCRCQ e que exista $\delta > 0$ e $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ ($\mathcal{U}$ vizinhança aberta de (x^*, y^*)) tais que $\lim_{(x,y)\to(x^*,y^*)} \varphi(x, y) = 0$ e, para cada $(x, y) \in \mathcal{U}$, $|\Phi(x, y) - \Phi(x^*, y^*)| \leq \varphi(x, y)\|\nabla\Phi(x, y)\|$, onde*

$$\Phi(x, y) = \|G(x)_+\|^2 + \|H(x)\|^2 + (n - \mathbf{1}^T y - \alpha)^2_+ + \|(y - \mathbf{1})_+\|^2 + \|x * y\|^2$$

é a medida de inviabilidade para (MPCaC). *Então x^* é ponto MPCaC-WSONC.*

A hipótese sobre a medida de inviabilidade no Teorema 4.1 é conhecida como desigualdade de *Kurdyka-Lojasiewicz generalizada* (do inglês, GKL). É empregada em resultados de convergência do Algoritmo 1 (veja por exemplo [4, 14]), e vale quando G, H são analíticas.

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0351

Observação 4.1. *Em [14] é definida uma estacionaridade forte de segunda ordem, onde o subespaço $C^W(x^*)$ é substituído pelo cone $\mathcal{C}^S(x^*) = \{d \in \mathcal{T}_{\text{lin}}(x^*) \mid \nabla f(x^*)^T d \leq 0\}$. Porém, é consenso que algoritmos apenas são capazes de atingir pontos "fracos" de segunda ordem; veja [5] e referências. Cabe ressaltar que em [7] é definida uma condição de segunda ordem tomando um cone linearizado maior que $\mathcal{T}_{\text{lin}}(x^*)$ (portanto a estacionaridade resultante é mais forte), porém nenhum algoritmo com convergência global associada é apresentado como o título do trabalho pode sugerir.*

A resolução de (MPCaC) visto como um problema de programação não linear usual carrega a variável y, tal como em [12–14] e no Teorema 4.1. Apesar de y poder ser ajustado na otimalidade para atestar M-estacionaridade [12, Proposição 2.3], isso não é feito automaticamente pelos métodos usuais. Logo, é interessante que métodos adaptados à (MPCaC) trabalhem somente com x, ou que "corrijam automaticamente" y. Em [9] um método LA prático para (MPCC) que mantém a complementaridade nos subproblemas foi proposto, técnica posteriormente descrita para (MPCaC) em [11]. Este LA (de primeira ordem) consiste em trocar (1) por

$$\min_{x,y} f(x) + \rho/2\big[\|(\mu^G/\rho + G(x))_+\|^2 + \|\mu^H/\rho + H(x)\|^2\big] \quad \text{s.a} \quad n - \mathbf{1}^T y \leq \alpha,\ y \leq \mathbf{1},\ x * y = 0. \tag{3}$$

Note que y tem papel auxiliar e a função objetivo só possui x. O modelo (3) é resolvido por um método de gradiente espectral projetado adaptado às restrições não convexas $x * y = 0$, cuja viabilidade numérica baseia-se na separabilidade de seus subproblemas. Somente x^k da solução de (3) é retornada para a iteração externa do Algoritmo 1. O método LA resultante converge a pontos M-estacionários sob MPCaC-CQs pouco exigentes e sem a necessidade da desigualdade GKL [11].

Inspirado no método LA de primeira ordem que adota (3) como subproblema, está em andamento a proposição de um LA adaptado à (MPCaC) com convergência a pontos MPCaC-WSONC sob MPCaC-RCRCQ. À primeira vista, bastaria exigir condições de segunda ordem, tais como as de ALGENCAN-SECOND (Algoritmo 1), sobre (3). Porém, isso não é razoável do ponto de vista numérico pois a presença de Hessianas destrói a separabilidade necessária para uma implementação razoável. Assim, separamos a resolução de (3) em dois passos: o primeiro computa um ponto M-estacionário z^k da maneira descrita em [11]; o segundo reduz o problema à uma face de $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i = z_i^k,\ \forall i\}$. Este último problema não possui restrições de complementaridade, e logo pode ser resolvido à pontos estacionários de segunda ordem de maneira usual.

5 Conclusões

O presente trabalho é um resumo das contribuições dadas pelo autor e colaboradores em [6, 14, 15] sobre a convergência de métodos LA sobre MPCCs e MPCaCs. Estendemos os resultados de convergência de métodos LA de primeira ordem desenvolvidos em [10]. Ademais, provamos um novo resultado sobre a convergência do método LA de segunda ordem ALGENCAN-SECOND [2] sobre MPCCs [6]. Apresentamos ainda propostas para uma implementação prática de ALGENCAN-SECOND, bem como uma alternativa específica para MPCCs que minimiza o tempo computacional gasto com computações de segunda ordem [6, 15]. Em relação à MPCaCs, definimos um novo conceito de estacionaridade de segunda ordem adequada à convergência de algoritmos, em particular a de ALGENCAN-SECOND sobre MPCaCs [14]. Apresentamos ainda uma proposta em desenvolvimento de um método LA de segunda ordem que evita trabalhar com variáveis auxiliares.

Referências

[1] R. Andreani, E. G. Birgin, J. M. Martínez e M. L. Schuverdt. "On augmented Lagrangian methods with general lower-level constraints". Em: **SIAM Journal on Optimization** 18.4 (2007), pp. 1286–1309. DOI: 10.1137/060654797.

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0351

[2] R. Andreani, E. G. Birgin, J. M. Martínez e M. L. Schuverdt. "Second-order negative-curvature methods for box-constrained and general constrained optimization". Em: **Computational Optimization and Applications** 45.2 (2010), pp. 209–236. DOI: 10.1007/s10589-009-9240-y.

[3] R. Andreani, G. Haeser, L. M. Mito, A. Ramos e L. D. Secchin. "On the best achievable quality of limit points of augmented Lagrangian schemes". Em: **Numerical Algorithms** 90.2 (2022), pp. 851–877. DOI: 10.1007/s11075-021-01212-8.

[4] R. Andreani, G. Haeser, L. D. Secchin e P. J. S. Silva. "New sequential optimality conditions for mathematical programs with complementarity constraints and algorithmic consequences". Em: **SIAM Journal on Optimization** 29.4 (2019), pp. 3201–3230. DOI: 10.1137/18M121040X.

[5] R. Andreani e L. D. Secchin. "A note on the convergence of an augmented Lagrangian algorithm to second-order stationary points". Em: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**. Vol. 6. 1. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, 2018. DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0303.

[6] R. Andreani, L. D. Secchin e P. J. S. Silva. "Convergence properties of a second order augmented Lagrangian method for mathematical programs with complementarity constraints". Em: **SIAM Journal on Optimization** 28.3 (2018), pp. 2574–2600. DOI: 10.1137/17M1125698.

[7] M. Bucher e A. Schwartz. "Second-order optimality conditions and improved convergence results for regularization methods for cardinality-constrained optimization problems". Em: **Journal of Optimization Theory and Applications** 178.2 (2018), pp. 383–410. DOI: 10.1007/s10957-018-1320-7.

[8] O. P. Burdakov, C. Kanzow e A. Schwartz. "Mathematical programs with cardinality constraints: reformulation by complementarity-type conditions and a regularization method". Em: **SIAM Journal on Optimization** 26.1 (2016), pp. 397–425. DOI: 10.1137/140978077.

[9] L. Guo e Z. Deng. "A new augmented Lagrangian method for MPCCs – theoretical and numerical comparison with existing augmented Lagrangian methods". Em: **Mathematics of Operations Research** 47.2 (2022), pp. 1229–1246. DOI: 10.1287/moor.2021.1165.

[10] A. F. Izmailov, M. V. Solodov e E. I. Uskov. "Global convergence of augmented Lagrangian methods applied to optimization problems with degenerate constraints, including problems with complementarity constraints". Em: **SIAM Journal on Optimization** 22.4 (2012), pp. 1579–1606. DOI: 10.1137/120868359.

[11] X. Jia, C. Kanzow, Patrick M. e G. Wachsmuth. "An augmented Lagrangian method for optimization problems with structured geometric constraints". Em: **Mathematical Programming** 199.1–2 (2023), pp. 1365–1415. DOI: 10.1007/s10107-022-01870-z.

[12] C. Kanzow, A. B. Raharja e A. Schwartz. "An augmented Lagrangian method for cardinality-constrained optimization problems". Em: **Journal of Optimization Theory and Applications** 189.3 (2021), pp. 793–813. DOI: 10.1007/s10957-021-01854-7.

[13] C. Kanzow, A. B. Raharja e A. Schwartz. "Sequential optimality conditions for cardinality-constrained optimization problems with applications". Em: **Computational Optimization and Applications** 80.1 (2021), pp. 185–211. DOI: 10.1007/s10589-021-00298-z.

[14] J. C. A. Medeiros, A. A. Ribeiro, M. Sachine e L. D. Secchin. **A practical second-order optimality condition for cardinality-constrained problems with application to an augmented Lagrangian method**. Rel. técn. Submetido. 2022.

[15] L. D. Secchin. "Aplicação de métodos de Lagrangiano aumentado a problemas de otimização com restrições de complementariedade". Tese de doutorado. Unicamp, 2018.

