

Sequências de Gibonacci na Geometria Analítica

Adriano Verdério,¹ Mari Sano,² Patrícia M. Kitani³

DAMAT/UTFPR, Curitiba, PR

Luciana da Fonseca Cruz⁴

Colégio Estadual Professora Lindaura Ribeiro Lucas, São José dos Pinhais, PR

Resumo. A sequência de Fibonacci é uma das mais belas e perfeitas sequências existentes na Matemática. Considerando este fato, apresentamos a sequência de Gibonacci, que generaliza a sequência de Fibonacci. Desenvolvemos algumas identidades relacionando essas duas sequências, ressaltando a de Gibonacci e sua aplicação na Geometria Analítica, a qual pode ser trabalhada em cursos de graduação. Ilustramos de forma dinâmica esta aplicação usando o *software* GeoGebra.

Palavras-chave. Gibonacci, Fibonacci, Geometria Analítica, GeoGebra.

1 Introdução

A matemática apresenta-se como uma ciência que nos permite analisar, sintetizar e propor soluções perante situações abstratas e/ou de nosso cotidiano. Para Ramos [4] a Matemática é uma ciência que estabelece uma relação entre o entendimento coerente e pensativo com situações práticas habituais, promovendo uma constante compreensão na busca pela veracidade dos fatos através de técnicas precisas e exatas.

Neste aspecto, percebemos como se torna relevante promover um estudo no qual possamos apresentar uma contribuição com relação ao ensino de Matemática.

Considerando o exposto, buscamos estabelecer uma conexão entre as experiências advindas do mundo real e, por meio destas, incorporar a utilização de conceitos matemáticos. Portanto, vemos como pertinente apresentar como tema as sequências de Fibonacci e Gibonacci, as quais são sequências recursivas que também são evidenciadas pela BNCC [1].

Os padrões e/ou sequências estão presentes no mundo a nossa volta. A sequência de Fibonacci é uma forma natural de lograr que os alunos entendam a relevância das sequências e os padrões no mundo real. Esta sequência é uma das mais belas sequências conhecidas, tendo aplicações em diversas áreas, por exemplo, Arquitetura, Arte, Biologia, Música, Fotografia e, evidentemente, Matemática.

Com relação a sua relevância Koshy [3] aponta que a sequência de Fibonacci é uma das sequências numéricas mais intrigantes. Ela continua a oferecer amplas oportunidades para matemáticos profissionais e amadores fazerem conjecturas e expandirem seus horizontes matemáticos.

Sendo assim, pretendemos proporcionar ao leitor uma breve introdução à sequência de Gibonacci e algumas das suas aplicações na Geometria Analítica usando o *software* GeoGebra.

¹verderio@utfpr.edu.br

²marisano@utfpr.edu.br

³kitani@utfpr.edu.br

⁴lugaucha18@yahoo.com.br

2 Preliminares

Nesta seção é feita uma breve revisão dos conceitos e resultados básicos necessários para o desenvolvimento da aplicação da sequência de Gibonacci. Uma abordagem mais ampla desta teoria pode ser consultada em Koshy [3].

A sequência de Fibonacci suscita a outras sequências. Dentre elas, temos a sequência de Gibonacci, a qual se apresenta como uma generalização dos números presentes na sequência de Fibonacci. Abaixo, apresentamos a definição da sequência de Gibonacci.

Fixados $a, b \in \mathbb{N}$ definimos a sequência de Gibonacci pela seguinte recorrência

$$G_n = G_{n-1} + G_{n-2},$$

com $n \geq 3$, tomando $G_1 = a$ e $G_2 = b$.

Consequentemente, os números pertencentes a sequência de Gibonacci são dados por $a, b, a + b, a + 2b, 2a + 3b, 3a + 5b, 5a + 8b, \dots$ onde os coeficientes de a e b são os números da sequência de Fibonacci. Podemos notar que se $a = b = 1$ a sequência de Gibonacci se iguala a sequência de Fibonacci e quando $a = 1$ e $b = 3$ temos que a sequência de Gibonacci coincide com a sequência de Lucas. O teorema a seguir caracteriza estes coeficientes.

Teorema 2.1. *Seja G_n um termo da sequência de Gibonacci. Então, $G_n = aF_{n-2} + bF_{n-1}$, onde $n \geq 1$.*

Demonstração. A seguir, apresentamos a demonstração por meio de Indução.

i) Como $F_1 = 1, F_0 = 0$ e $F_{-1} = 1$, para $n = 1$ e $n = 2$ temos que

$$aF_{-1} + bF_0 = a = G_1 \quad \text{e} \quad aF_0 + bF_1 = b = G_2.$$

Logo, o resultado é válido para $n = 1$ e $n = 2$.

ii) Seja k um número natural, vamos supor que o resultado seja válido para todos os inteiros n , tais que $n \leq k$. Sendo assim, $G_k = aF_{k-2} + bF_{k-1}$ e $G_{k-1} = aF_{k-3} + bF_{k-2}$.

Mostremos a validade do resultado para $k + 1$, ou seja, $G_{k+1} = aF_{k-1} + bF_k$. De fato, temos que

$$\begin{aligned} G_{k+1} &= G_k + G_{k-1} \\ &\stackrel{h.i.}{=} aF_{k-2} + bF_{k-1} + aF_{k-3} + bF_{k-2} = a(F_{k-2} + F_{k-3}) + b(F_{k-1} + F_{k-2}) = aF_{k-1} + bF_k. \end{aligned}$$

Assim, o resultado é válido para $k + 1$.

Portanto, pelo princípio de Indução segue que o resultado é verdadeiro para todo $n \geq 1$. □

Como na sequência de Fibonacci, observamos a existência de uma fórmula que é similar à fórmula de Binet e, esta apresenta um método prático para determinar os valores presentes na sequência de Gibonacci. Este método é descrito na próxima proposição.

Proposição 2.1. *Sejam $c = a + (a - b)\beta$ e $d = a + (a - b)\alpha$, onde $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Então,*

$$G_n = \frac{c\alpha^n - d\beta^n}{\alpha - \beta}.$$

Demonstração. Para realizarmos a demonstração vamos levar em consideração o Teorema 2.1, a fórmula de Binet e as seguintes relações: $\frac{1}{\alpha^2} = \beta^2$, $\frac{1}{\alpha} = -\beta$, $\alpha^2 = \alpha + 1$ e $\beta^2 = \beta + 1$. Isto posto,

$$\begin{aligned} G_n &= aF_{n-2} + bF_{n-1} = a \left(\frac{\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}}{\alpha - \beta} \right) + b \left(\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left[\alpha^n \left(\frac{a}{\alpha^2} + \frac{b}{\alpha} \right) - \beta^n \left(\frac{a}{\beta^2} + \frac{b}{\beta} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} [\alpha^n (a(\beta + 1) - b\beta) - \beta^n (a(\alpha + 1) - b\alpha)] \\ &= \frac{c\alpha^n - d\beta^n}{\alpha - \beta}. \end{aligned}$$

□

Note que, $cd = a^2 + ab - b^2$. Essa constante aparece em várias identidades que envolvem a sequência de Gibonacci.

A seguir exprimimos uma identidade relacionada com os números de Gibonacci. Uma demonstração detalhada dessa identidade pode ser encontrada em Cruz [2].

Proposição 2.2. *Se* $m, n \in \mathbb{N}$, *temos que* $G_{m+n} = G_m F_{n+1} + G_{m-1} F_n$.

Concluimos esta seção mostrando uma identidade satisfeita pelos números de Gibonacci, a qual será usada frequentemente na próxima seção.

Proposição 2.3. *Se* $m, n \in \mathbb{N}$, $cd = a^2 + ab - b^2$ *segue*

$$G_n G_{m+k} - G_{n+k} G_m = (-1)^{n+1} F_k F_{m-n} cd.$$

Demonstração. Para efetuarmos a demonstração utilizaremos o resultado da Proposição 2.1, a fórmula de Binet e a relação $\alpha\beta = -1$. Por conseguinte, segue que

$$\begin{aligned} G_n G_{m+k} - G_{n+k} G_m &= \left(\frac{c\alpha^n - d\beta^n}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{c\alpha^{m+k} - d\beta^{m+k}}{\alpha - \beta} \right) - \left(\frac{c\alpha^{n+k} - d\beta^{n+k}}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{c\alpha^m - d\beta^m}{\alpha - \beta} \right) \\ &= \frac{c^2 \alpha^{n+m+k} - cd \alpha^n \beta^{m+k} - cd \beta^n \alpha^{m+k} + d^2 \beta^{n+m+k}}{(\alpha - \beta)^2} \\ &\quad - \left(\frac{c^2 \alpha^{n+m+k} - cd \alpha^{n+k} \beta^m - cd \beta^{n+k} \alpha^m + d^2 \beta^{n+m+k}}{(\alpha - \beta)^2} \right) \\ &= \frac{-cd \alpha^n \beta^n (\beta^{m-n+k} + \alpha^{m-n+k}) + cd \alpha^n \beta^n (\alpha^k \beta^{m-n} + \beta^k \alpha^{m-n})}{(\alpha - \beta)^2} \\ &= (-1)^{n+1} F_k F_{m-n} cd. \end{aligned}$$

□

3 Aplicações

Entre as diversas aplicações da sequência de Gibonacci desenvolveremos aquela que envolve a Geometria Analítica. A seguir alguns resultados que podem ser introduzidos em qualquer curso de graduação que contenha a disciplina de Geometria Analítica na sua grade. Como mencionado fizemos o uso do *software* GeoGebra para ilustrar alguns dos resultados.

Teorema 3.1. *A área do triângulo com vértices* (G_n, G_{n+r}) , (G_{n+p}, G_{n+p+r}) *e* (G_{n+q}, G_{n+q+r}) *é independente de* n , *onde* G_k *representa o* k -*ésimo número de Gibonacci.*

Demonstração. A área do triângulo equivale à metade do valor absoluto do seguinte determinante:

$$D = \begin{vmatrix} G_n & G_{n+r} & 1 \\ G_{n+p} & G_{n+p+r} & 1 \\ G_{n+q} & G_{n+q+r} & 1 \end{vmatrix} = G_{n+p}G_{n+q+r} - G_{n+q}G_{n+p+r} - (G_nG_{n+q+r} - G_{n+q}G_{n+r}) + G_nG_{n+p+r} - G_{n+p}G_{n+r}.$$

Agrupando as parcelas deste determinante e, aplicando a Proposição (2.3) a este, obtemos

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{n+p+1}F_rF_{n+q-(n+p)} \cdot \mu - ((-1)^{n+1}F_rF_{n+q-n} \cdot \mu) + (-1)^{n+1}F_rF_{n+p-n} \cdot \mu \\ &= (-1)^{n+p+1}F_rF_{q-p} \cdot \mu + (-1)^nF_rF_q \cdot \mu + (-1)^{n+1}F_rF_p \cdot \mu \\ &= (-1)^nF_r \cdot \mu((-1)^{p+1}F_{q-p} + F_q - F_p). \end{aligned}$$

Logo, a área do triângulo é dada por:

$$A = \frac{|D|}{2} = \frac{F_r \cdot \mu}{2} |((-1)^{p+1}F_{q-p} + F_q - F_p)|.$$

Portanto, a área do triângulo com vértices (G_n, G_{n+r}) , (G_{n+p}, G_{n+p+r}) e (G_{n+q}, G_{n+q+r}) independe de n . □

Por meio da Figura 1 podemos visualizar a representação geométrica do Teorema 3.1. Na representação incluímos um controle deslizante para n , p , r e q , onde é possível constatar que ao variar o valor de n não há alteração no valor da área correspondente.

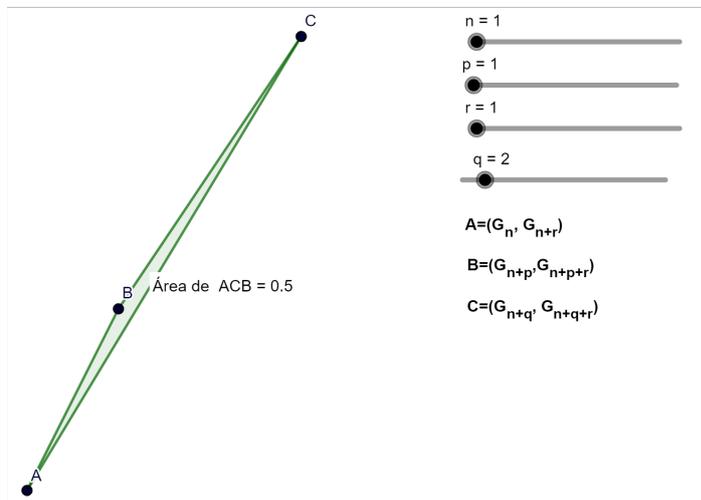


Figura 1: Representação geométrica do Teorema 3.1. Fonte: elaborado pelos autores.

Esta construção geométrica está disponível pelo link:

<https://www.geogebra.org/m/kykepxgz>

Corolário 3.1. A área de um triângulo de vértices $(F_n, F_{n+h}), (F_{n+2h}, F_{n+3h})$ e (F_{n+4h}, F_{n+5h}) é dada por:

$$F_h \cdot \frac{(F_{4h} - 2F_{2h})}{2}.$$

Demonstração. A demonstração deste corolário segue, tomando $r = h, p = 2h, q = 4h$, e $a = b = 1$ no Teorema (3.1). □

A representação geométrica do corolário acima pode ser acessada pelo link:

<https://www.geogebra.org/m/fddgt8kf>

Ao analisarmos a representação geométrica referente a área do triângulo, podemos observar que variando o controle deslizante o triângulo se torna cada vez mais "estreito" nos dando a impressão de que o triângulo se assemelha a um segmento de reta.

Uma outra aplicação, agora no espaço, é dada pelo teorema abaixo.

Teorema 3.2. As retas que passam pela origem na direção do vetor (G_n, G_{n+p}, G_{n+q}) são coplanares para todo n , onde p e q são constantes.

Demonstração. Tome três retas que passam pela origem, com seus respectivos vetores diretores, $(G_i, G_{i+p}, G_{i+q}), (G_j, G_{j+p}, G_{j+q})$ e (G_k, G_{k+p}, G_{k+q}) .

Para que estas retas sejam coplanares, precisamos mostrar que o valor do seguinte determinante

$$D = \begin{vmatrix} G_i & G_{i+p} & G_{i+q} \\ G_j & G_{j+p} & G_{j+q} \\ G_k & G_{k+p} & G_{k+q} \end{vmatrix}$$

seja igual a zero. Empregando a Proposição (2.2), segue que

$$D = \begin{vmatrix} G_i & G_i F_{p+1} + G_{i-1} F_p & G_i F_{q+1} + G_{i-1} F_q \\ G_j & G_j F_{p+1} + G_{j-1} F_p & G_j F_{q+1} + G_{j-1} F_q \\ G_k & G_k F_{p+1} + G_{k-1} F_p & G_k F_{q+1} + G_{k-1} F_q \end{vmatrix},$$

e aplicando operações elementares, facilmente conclui-se que $D = 0$. □

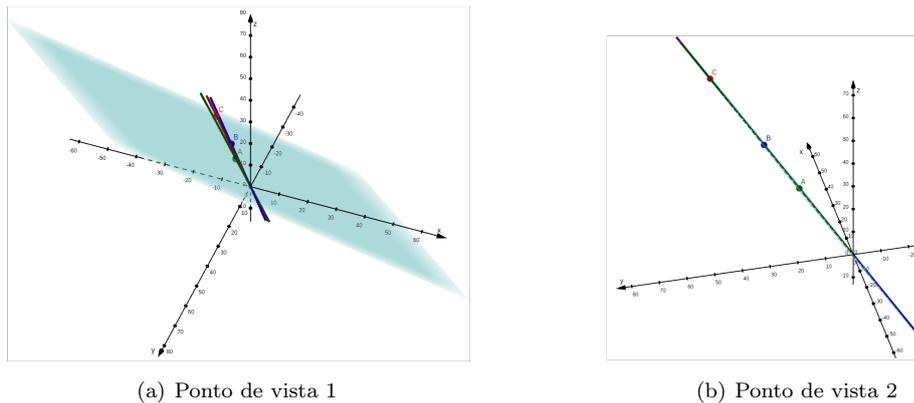


Figura 2: Plano que contém as retas do Teorema 3.2. Fonte: elaborado pelos autores.

A figura acima ilustra o Teorema 3.2. Com o intuito de obter uma visualização dinâmica, usando o controle deslizante, disponibilizamos o seguinte link:

<https://www.geogebra.org/m/wzndeufk>

Encerramos esta seção mostrando mais duas aplicações no espaço.

Teorema 3.3. *O plano contendo a família de pontos (G_n, G_{n+p}, G_{n+q}) contém a origem, onde p e q são constantes.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.2 os pontos dados são coplanares. Sejam (G_i, G_{i+p}, G_{i+q}) , (G_j, G_{j+p}, G_{j+q}) e (G_k, G_{k+p}, G_{k+q}) três pontos quaisquer do plano, sua equação é dada por

$$\begin{vmatrix} x - G_i & y - G_{i+p} & z - G_{i+q} \\ G_j - G_i & G_{j+p} - G_{i+p} & G_{j+q} - G_{i+q} \\ G_k - G_i & G_{k+p} - G_{i+p} & G_{k+q} - G_{i+q} \end{vmatrix} = 0$$

Usando propriedades do determinante obtemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} x - G_i & y - G_{i+p} & z - G_{i+q} \\ G_j - G_i & G_{j+p} - G_{i+p} & G_{j+q} - G_{i+q} \\ G_k - G_i & G_{k+p} - G_{i+p} & G_{k+q} - G_{i+q} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x & y & z \\ G_j - G_i & G_{j+p} - G_{i+p} & G_{j+q} - G_{i+q} \\ G_k - G_i & G_{k+p} - G_{i+p} & G_{k+q} - G_{i+q} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} G_i & G_{i+p} & G_{i+q} \\ G_j - G_i & G_{j+p} - G_{i+p} & G_{j+q} - G_{i+q} \\ G_k - G_i & G_{k+p} - G_{i+p} & G_{k+q} - G_{i+q} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x & y & z \\ G_j - G_i & G_{j+p} - G_{i+p} & G_{j+q} - G_{i+q} \\ G_k - G_i & G_{k+p} - G_{i+p} & G_{k+q} - G_{i+q} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, temos a equação do plano $Ax + By + Cz = 0$, com $A = \begin{vmatrix} G_{j+p} - G_{i+p} & G_{j+q} - G_{i+q} \\ G_{k+p} - G_{i+p} & G_{k+q} - G_{i+q} \end{vmatrix}$, $B = - \begin{vmatrix} G_j - G_i & G_{j+q} - G_{i+q} \\ G_k - G_i & G_{k+q} - G_{i+q} \end{vmatrix}$ e $C = \begin{vmatrix} G_j - G_i & G_{j+p} - G_{i+p} \\ G_k - G_i & G_{k+p} - G_{i+p} \end{vmatrix}$. □

Teorema 3.4. *A família de planos $G_n x + G_{n+p} y + G_{n+q} z + G_{n+r} = 0$ se interceptam em uma reta cuja equação é independente de n , onde p, q e r são constantes.*

Demonstração. Como os vetores normais da família de planos são todos diferentes basta interceptar dois planos quaisquer dessa família e resolver o sistema de equações abaixo:

$$\begin{cases} G_i x + G_{i+p} y + G_{i+q} z + G_{i+r} = 0 \\ G_j x + G_{j+p} y + G_{j+q} z + G_{j+r} = 0, \end{cases}$$

cujas soluções é a reta

$$r : \begin{cases} x = \frac{-G_{i+r}G_{j+p} + G_{i+p}G_{j+r}}{G_iG_{j+p} - G_{i+p}G_j} - \left(\frac{G_{i+q}G_{j+p} - G_{i+p}G_{j+q}}{G_iG_{j+p} - G_{i+p}G_j} \right) \lambda \\ y = \frac{-G_iG_{j+r} + G_{i+r}G_j}{G_iG_{j+p} - G_{i+p}G_j} - \left(\frac{G_iG_{j+q} - G_{i+q}G_j}{G_iG_{j+p} - G_{i+p}G_j} \right) \lambda \\ z = \lambda, \end{cases}$$

com $\lambda \in \mathbb{R}$. Da Proposição 2.3 temos que a reta r resulta em $x = (-1)^p \frac{F_{r-p}}{F_p} - (-1)^q \frac{F_{p-q}}{F_p} \lambda$, $y = -\frac{F_r}{F_p} - \frac{F_q}{F_p} \lambda$ e $z = \lambda$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, que não depende de n . □

A seguinte figura ilustra o Teorema 3.4. Para obter uma visualização dinâmica, usando o controle deslizante, disponibilizamos o seguinte link:

<https://www.geogebra.org/m/den9v7sh>

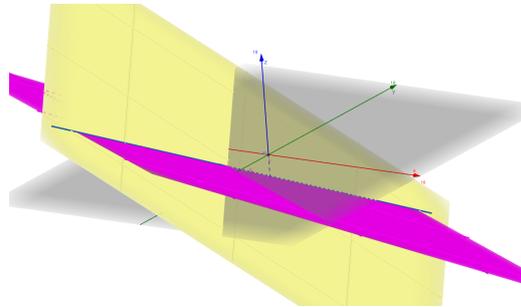


Figura 3: Representação geométrica do Teorema 3.4. Fonte: elaborado pelos autores.

4 Considerações Finais

Neste trabalho apresentamos aplicações entre as sequências de Fibonacci e Gibonacci e a Geometria Analítica. Essas aplicações foram demonstradas algebricamente e constatadas geometricamente com o uso do *software* GeoGebra.

Observamos que este tipo de aplicação não costuma ser enfatizada ou evidenciada na Educação Básica e na graduação. Fato que pode ser verificado durante o levantamento bibliográfico, onde percebemos que grande parte dos trabalhos envolvendo o tema de Fibonacci recaía em aplicações como, por exemplo, o problema dos coelhos o que se mostrou de maneira desafiadora e motivadora. Considerando a relevância da sequência de Fibonacci não devemos nos limitar às suas aplicabilidades usuais. Neste sentido, vemos como pertinente o aprofundamento de nosso estudo, pesquisa e desenvolvimento de outros trabalhos os quais possibilitem aos professores e alunos diferentes interpretações do tema.

Agradecimentos

À Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação do Campus Curitiba da UTFPR, pela concessão de uma bolsa de estudos durante seis meses.

Referências

- [1] BRASIL. **Base nacional comum curricular**. Online. Acessado em 29/02/2022, http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf.
- [2] L. da F. Cruz. “Desvendando as sequências de Fibonacci, Lucas e Gibonacci”. Dissertação de mestrado. UTFPR, Campus Curitiba, 2023.
- [3] T. Koshy. **Fibonacci and Lucas numbers with applications**. 2a. ed. Vol. 1. Hoboken, New Jersey: John Wiley Sons, 2017. ISBN: 9781118742129.
- [4] T. C. Ramos. “A importância da matemática na vida cotidiana dos alunos do ensino fundamental 2”. Em: **Cairu em revista** 17.9 (2017), pp. 201–218.