

# Viga Dupla Euler-Bernoulli com Camada Viscoelástica, Força Axial e sobre uma Fundação Elástica

Rosemaira Dalcin Copetti<sup>1</sup>

UFSM, Santa Maria, RS

Moisés Rutkoski.<sup>2</sup>

IFMG, Bambuí, MG

**Resumo.** Neste trabalho é considerado um sistema de viga dupla Euler-Bernoulli acoplado por uma camada viscoelástica onde são estudados os efeitos de uma força axial e da fundação elástica sobre as frequências naturais e os modos de vibração. As frequências naturais e os modos de vibração são obtidos através da análise modal e de uma formulação matricial. Os modos de vibração são escritos em termos da solução fundamental matricial associada ao sistema. São considerados dois modelos, um onde a solução fundamental é obtida por uma forma fechada e outro, obtida através da transformada de Laplace.

**Palavras-chave.** Euler-Bernoulli, Viga Dupla, Solução Fundamental, Frequências Naturais, Modos de Vibração

## 1 Introdução

A análise estrutural de vigas desempenha um papel fundamental em diversos campos das engenharias, desde aplicações convencionais como em engenharia mecânica e aeroespacial até estruturas de escala nanométrica. A teoria de Euler-Bernoulli, amplamente utilizada para analisar o comportamento vibracional em vigas negligencia fenômenos como a inércia rotacional e os efeitos de cisalhamento, efeitos considerados quando se estuda vigas de Timoshenko [4, 7]. Para minimizar estes efeitos, as vigas consideradas são homogêneas, prismáticas e delgadas. Este trabalho concentra-se na investigação de sistemas de duas vigas paralelas acopladas viscoelasticamente, com fundação elástica e força axial. A camada viscoelástica incorpora os dispositivos de mola e amortecedor, os quais desempenham um importante papel na estabilidade do sistema. Nossa abordagem destaca-se ao estender metodologias tradicionais para obtenção de soluções, uma vez que utiliza a solução fundamental para determinar as frequências naturais e os modos de vibração. A solução fundamental tem sido utilizada em vários problemas que envolvem vigas Euler-Bernoulli, Timoshenko [3], nanotubos de carbono [2], entre outros. Ao longo deste estudo, investigamos dois casos: o primeiro considera uma viga dupla com camada viscoelástica e sobre uma fundação elástica, onde a solução fundamental é obtida por meio de uma fórmula fechada [1], e o segundo um sistema de viga dupla com camada viscoelástica e força axial onde a solução fundamental é obtida pela transformada de Laplace [3]. A análise modal e uma formulação matricial são utilizadas para determinar as frequências naturais e os modos de vibração associados ao sistema. Por meio dessa abordagem analítica, buscamos proporcionar uma compreensão mais profunda das características vibracionais desses sistemas de vigas duplas com camada viscoelástica, contribuindo assim para o avanço no estudo de vibrações em estruturas usadas nas mais diversas aplicações. Realizamos simulações para obter as frequências naturais e os modos de vibração.

---

<sup>1</sup>rosemaira.copetti@ufsm.br

<sup>2</sup>moisesrutkoski52@gmail.com

## 2 Formulação do Modelo Matemático

O sistema matricial que descreve o deslocamento transversal de um problema dado por duas vigas Euler-Bernoulli acopladas viscoelasticamente, com força axial e fundação elástica, conforme Figura 1, pode ser descrito, na forma matricial evolutiva, como

$$M \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + C \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + K \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

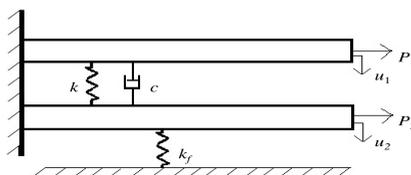


Figura 1: Viga dupla Euler-Bernoulli. Fonte: autor.

onde  $\mathbf{u}(t, x)$  e  $\mathbf{0}$  são vetores  $2 \times 1$  e  $M, C$  e  $K$  são matrizes  $2 \times 2$ , dadas respectivamente por

$$\mathbf{u}(t, x) = \begin{pmatrix} u_1(t, x) \\ u_2(t, x) \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \rho_1 A_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 A_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 + c & -c \\ -c & c_2 + c \end{pmatrix}, \quad (2)$$

e

$$K = \begin{pmatrix} E_1 I_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + P_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k & -k \\ -k & E_2 I_2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + P_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k + k_f \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Observe que  $M$  e  $C$  são matrizes constantes e  $K$  é um operador espacial matricial de quarta ordem. As equações de equilíbrio que descrevem o modelo foram obtidas através da aplicação do princípio de Hamilton. Para mais detalhes, veja [6, 7].

i=1 indica a viga superior	i=2 indica a viga inferior
t: unidade temporal $t > 0$	x: unidade espacial com $0 < x < L$
L: comprimento das vigas	$u_i(t, x)$ : deslocamento transversal da viga
$\rho_i$ : densidade linear de massa	$A_i(x)$ : área da seção transversal
$c_i$ : constante de amortecimento da viga	c: constante de amortecimento da camada viscosa
$E_i$ : módulo de Elasticidade de Young	k: constante da camada elástica
$I_i(x)$ : momento de inércia	$k_f$ : constante da fundação elástica
$P_i$ : força axial	

Neste trabalho queremos estender o uso da solução fundamental ao problema composto por duas vigas Euler-Bernoulli conectadas por uma camada viscoelástica e sobre uma fundação elástica. A solução fundamental matricial associada ao problema será utilizada para escrever a equação característica, obter as frequências naturais e escrever a solução da equação modal. A solução livre e a solução forçada também podem ser escritas em termos da solução fundamental, mas esses tópicos não serão abordados aqui.

## 3 Solução fundamental

Consideremos que o sistema descrito pela equação (1) é excitado harmonicamente por uma frequência  $\omega$ , então podemos supor uma solução

$$\mathbf{u}(t, x) = e^{\lambda t} \mathbf{v}(x), \quad \lambda = \omega I, \quad I = \sqrt{-1}, \quad (4)$$

onde  $\mathbf{v}(x) = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}^T$  é o modo de vibração associado a frequência  $\omega$ , substituindo na equação (1), resulta

$$\mathbf{A}\mathbf{v}^{(iv)}(x) - \mathbf{P}\mathbf{v}''(x) + (-\lambda^2\mathbf{M} - \lambda\mathbf{C} + \mathbf{B})\mathbf{v}(x) = \mathbf{0}, \quad (5)$$

sendo que o operador  $\mathbf{K}$  em equação (3), foi decomposto como soma de três operadores,

$$\mathbf{K} = -\mathbf{A}\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \mathbf{P}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \mathbf{B}, \quad (6)$$

com

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -E_1I_1 & 0 \\ 0 & -E_2I_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} -P_1 & 0 \\ 0 & -P_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -k & k \\ k & -k - k_f \end{pmatrix}. \quad (7)$$

A equação (5) é conhecida como equação modal e sua solução, usando a solução fundamental matricial [1],  $\mathbf{h}(x)$ , é,

$$\mathbf{v}(x) = \mathbf{h}(x)\mathbf{e}_1 + \mathbf{h}'(x)\mathbf{e}_2 + \mathbf{h}''(x)\mathbf{e}_3 + \mathbf{h}'''(x)\mathbf{e}_4 = \mathbf{\Phi}\mathbf{e}, \quad (8)$$

onde

$$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}(x) & \mathbf{h}'(x) & \mathbf{h}''(x) & \mathbf{h}'''(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}(x) = \begin{pmatrix} h_{11}(x) & h_{12}(x) \\ h_{13}(x) & h_{14}(x) \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \end{pmatrix}^T \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_j = \begin{pmatrix} e_{j1} & e_{j2} \end{pmatrix}^T, \quad (10)$$

$\mathbf{e}$  é um vetor determinado pelas condições de contorno e  $j = 1, 2, 3, 4$ . A solução fundamental matricial  $\mathbf{h}(x)$  é solução do problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{h}^{(iv)}(x) - \mathbf{P}\mathbf{h}''(x) + (-\lambda^2\mathbf{M} - \lambda\mathbf{C} + \mathbf{B})\mathbf{h}(x) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{h}(0) = \mathbf{0}, \mathbf{h}'(0) = \mathbf{0}, \mathbf{h}''(0) = \mathbf{0}, \mathbf{A}\mathbf{h}'''(0) &= \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (11)$$

O uso da solução fundamental simplifica a forma dos modos e também a equação característica usada para delterminar as frequências naturais.

Para obter a equação característica consideramos as condições de contorno escritas na forma matricial. Condições de contorno gerais, clássicas ou não clássicas podem ser escritas na forma

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1^0\mathbf{v}(0) + \mathbf{B}_1^0\mathbf{v}'(0) + \mathbf{C}_1^0\mathbf{v}''(0) + \mathbf{D}_1^0\mathbf{v}'''(0) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{A}_2^0\mathbf{v}(0) + \mathbf{B}_2^0\mathbf{v}'(0) + \mathbf{C}_2^0\mathbf{v}''(0) + \mathbf{D}_2^0\mathbf{v}'''(0) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{A}_1^L\mathbf{v}(L) + \mathbf{B}_1^L\mathbf{v}'(L) + \mathbf{C}_1^L\mathbf{v}''(L) + \mathbf{D}_1^L\mathbf{v}'''(L) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{A}_2^L\mathbf{v}(L) + \mathbf{B}_2^L\mathbf{v}'(L) + \mathbf{C}_2^L\mathbf{v}''(L) + \mathbf{D}_2^L\mathbf{v}'''(L) &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (12)$$

onde

$$\mathbf{A}_i^z = \begin{pmatrix} a_{i1}^z & 0 \\ 0 & a_{i2}^z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_i^z = \begin{pmatrix} b_{i1}^z & 0 \\ 0 & b_{i2}^z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_i^z = \begin{pmatrix} c_{i1}^z & 0 \\ 0 & c_{i2}^z \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{D}_i^z = \begin{pmatrix} d_{i1}^z & 0 \\ 0 & d_{i2}^z \end{pmatrix}, \quad (13)$$

com  $z = 0, L$  e  $i = 1, 2$ .

Substituindo  $\mathbf{v}(x)$  dado por equação (8) em equação (12), usando as condições de contorno específicas para cada caso considerado e as condições iniciais do problema de valor inicial dadas na equação (11), temos um sistema

$$\mathbb{B}\mathbb{H}_0^L\mathbf{e} = \mathbf{0}, \quad (14)$$

onde a matriz  $\mathbb{B}$  ( $8 \times 16$ ) carrega as informações com respeito as condições de contorno, a matriz  $\mathbb{H}$  ( $16 \times 8$ ) é a matriz da base de soluções gerada pela solução fundamental em  $x = 0$  e  $x = L$ ,  $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \end{pmatrix}^T$  e  $\mathbf{0}$  são vetores ( $8 \times 1$ ) de constantes e vetor nulo, respectivamente. Observe que a matriz  $\mathbb{H}_0^L = \mathbb{H}_0^L(\lambda)$ . Soluções não nulas para  $\mathbb{B}\mathbb{H}_0^L\mathbf{e} = \mathbf{0}$  são encontradas, quando  $\det(\mathbb{B}\mathbb{H}_0^L) = 0$ . Esta equação é denominada equação característica. A seguir, consideremos dois métodos para determinar a solução fundamental matricial.

### 3.1 Fórmula fechada

Neste caso a solução fundamental será obtida utilizando a fórmula fechada dada por Claeysen [1],

$$\mathbf{h}(x) = \sum_{j=1}^{4N} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-1-i)}(x) \mathbf{h}_{(4N-j)}, \quad (15)$$

onde os  $b_i$ 's são os coeficientes do polinômio característico  $P(s)$ ,  $\mathbf{h}_k$  é a solução da equação matricial em diferenças e  $d(x)$  é solução do problema de valor inicial, dados, respectivamente, por

$$P(s) = \det(\mathbf{A}s^4 - \mathbf{P}s^2 + (-\lambda^2\mathbf{M} - \lambda\mathbf{C} + \mathbf{B})) = 0 = \sum_{i=0}^{4N} b_i s^{4N-i}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{h}_{k+4} - \mathbf{P}\mathbf{h}_{k+2} + (-\lambda^2\mathbf{M} - \lambda\mathbf{C} + \mathbf{B})\mathbf{h}_k &= \mathbf{0}, & b_0 d^{4N}(x) + b_1 d^{4N-1}(x) + \dots + b_{4N} d(x) &= 0, \\ \mathbf{h}_0 = 0, \quad \mathbf{h}_1 = 0, \quad \mathbf{h}_2 = 0 \quad \mathbf{A}\mathbf{h}_3 = \mathbf{I}, & & d(0) = 0, \quad d'(0) = 0, \dots, & b_0 d^{(4N-1)}(0) = 1. \end{aligned}$$

### 3.2 Transformada de Laplace

Aqui a solução fundamental matricial é escrita da forma  $\mathbf{h}(x) = \mathbf{h}_{EB}(x) + \mathbf{h}_{ck}(x)$ , onde  $\mathbf{h}_{EB}$  é a resposta fundamental matricial correspondente a viga dupla Euler-Bernoulli com força axial sem a camada viscoelástica, isto é,  $k = c = 0$  de modo que  $\mathbf{h}_{EB}$  satisfaz

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{h}_{EB}^{(iv)}(x) - \mathbf{P}\mathbf{h}_{EB}''(x) - \lambda^2\mathbf{h}_{EB}(x) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{h}_{EB}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{h}'_{EB}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{h}''_{EB}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}\mathbf{h}_{EB}'''(0) &= \mathbb{I}, \end{aligned} \quad (17)$$

e  $\mathbf{h}_{ck}(x)$  depende dos dispositivos  $c$  e  $k$  da camada viscoelástica, da força axial  $P$ , e satisfaz o problema forçado com condições iniciais nulas, dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{h}_{ck}^{(iv)}(x) - \mathbf{P}\mathbf{h}_{ck}''(x) + (-\lambda^2\mathbf{M} - \lambda\mathbf{C} + \mathbf{B})\mathbf{h}_{ck}(x) &= (-\mathbf{B} + \lambda\mathbf{C})\mathbf{h}_{EB}(x), \\ \mathbf{h}_{ck}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{h}'_{ck}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{h}''_{ck}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}\mathbf{h}_{ck}'''(0) &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (18)$$

A solução do problema dado pela equação (18) pode ser expressa pela convolução

$$\mathbf{h}_{ck}(x) = - \int_0^L \mathbf{h}(x - \xi)(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{C})\mathbf{h}_{EB}(\xi) d\xi = -\mathbf{h}(x) * (\mathbf{B} - \lambda\mathbf{C})\mathbf{h}_{EB}(x), \quad (19)$$

onde  $\mathbf{h}(x)$  satisfaz equação (11), e portanto  $\mathbf{h}(x) = \mathbf{h}(x)$ , pois  $\mathbf{h}(x)$  é a solução fundamental matricial que também satisfaz (11).

Por transformada de Laplace, com  $\mathbf{H}(s) = \mathcal{L}\{\mathbf{h}(x)\}$ ,  $\mathbf{H}_{EB}(s) = \mathcal{L}\{\mathbf{h}_{EB}(x)\}$ , obtemos

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{H}_{EB}(s)(\mathbf{I} + (\mathbf{B} - \lambda\mathbf{C})\mathbf{H}_{EB}(s))^{-1}, \quad (20)$$

$\mathbf{I}$  é a matriz identidade de ordem dois. Depois de algumas manipulações algébricas e tomando a transformada inversa de Laplace obtemos a solução fundamental matricial correspondente a viga dupla Euler-Bernoulli acoplada por uma camada viscoelástica e com força axial,  $\mathbf{h}(x)$ , que é uma matriz  $(2 \times 2)$ , simétrica cujas entradas são dadas por

$$h_{11}(x) = h_{22}(x) = \frac{1}{2EI} \left( \frac{\alpha \sinh(\beta x) - \beta \sinh(\alpha x)}{\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)} + \frac{\delta \sinh(\epsilon x) - \epsilon \sinh(\delta x)}{\epsilon\delta(-\epsilon^2 + \delta^2)} \right), \quad (21)$$

e

$$h_{12}(x) = h_{21}(x) = \frac{1}{2EI} \left( \frac{-\alpha \sinh(\beta x) + \beta \sinh(\alpha x)}{\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)} + \frac{\delta \sinh(\epsilon x) - \epsilon \sinh(\delta x)}{\epsilon\delta(-\epsilon^2 + \delta^2)} \right), \quad (22)$$

onde  $\epsilon$  e  $\delta$  são raízes de um polinômio que corresponde a viga Euler-Bernoulli com força axial ( $k = c = 0$ ) e  $\alpha$  e  $\beta$  correspondem a viga Euler-Bernoulli com camada viscoelástica e força axial,

$$\begin{aligned} \epsilon &= \sqrt{\frac{P + \sqrt{-4m\lambda^2 EI + P^2}}{2EI}}, & \delta &= \sqrt{-\frac{P - \sqrt{-4m\lambda^2 EI + P^2}}{2EI}}, \\ \alpha &= \sqrt{\frac{P + \sqrt{-4EI(m\lambda^2 - 2c\lambda + 2k) + P^2}}{2EI}}, & \beta &= \sqrt{\frac{P - \sqrt{-4EI(m\lambda^2 - 2c\lambda + 2k) + P^2}}{2EI}}. \end{aligned}$$

No trabalho de Rutkoski [8], está técnica foi aplicada ao sistema de viga dupla acoplado por uma camada elástica.

## 4 Simulações

A seguir, serão realizadas algumas simulações para determinar as frequências naturais e os modos de vibração. Os parâmetros usados são  $\rho_1 = \rho_2 = \rho = 2 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $A_1 = A_2 = A = 5 \times 10^{-2} \text{ m}^2$ ,  $m = \rho A$ ,  $E_1 = E_2 = E = 1 \times 10^{10} \text{ N m}^{-2}$ ,  $I_1 = I_2 = I = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ ,  $k = 1 \times 10^5 \text{ Nm}^{-2}$ ,  $c_1 = c_2 = 0$ ,  $c = 8 \times 10^3 \text{ Nm/s}$ ,  $k_f = 2,5 \times 10^6 \text{ Nm}^{-2}$  e  $P_1 = P_2 = P = 10EI/L^2$  [5, 6].

### 4.1 Caso 1 - Viga dupla Euler-Bernoulli com camada viscoelástica e fundação elástica

Neste caso, consideramos as duas vigas fixas-livres, cujas condições de contorno, para  $i = 1, 2$ , são

$$u_i(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x}(t, 0) = 0, \quad E_i I_i \frac{\partial^3 u_i}{\partial x^3}(t, L) = 0, \quad E_i I_i \frac{\partial^3 u_i}{\partial x^3}(t, L) = 0. \quad (23)$$

Substituindo equação (4) em equação (23) com  $x = 0$ , e usando as condições iniciais da equação (11), temos  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}'(0) = \mathbf{0}$ , de modo que  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_4 = 0$  em equação (8). Assim  $\mathbf{v}(x) = \mathbf{h}(x)\mathbf{e}_1 + \mathbf{h}'(x)\mathbf{e}_2$ .

Usando as condições de contorno em  $x = 0$  juntamente com as condições iniciais do problema de valor inicial que envolve a solução fundamental matricial em equação (11), obtemos a equação característica para a viga dupla fixa-livre Euler-Bernoulli com camada viscoelástica sobre uma base elástica, dada por

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{h}''(L) & \mathbf{h}'''(L) \\ \mathbf{h}'''(L) & \mathbf{h}^{(iv)}(L) \end{pmatrix} = 0. \quad (24)$$

### 4.2 Caso 2 - Viga dupla Euler-Bernoulli com camada viscoelástica e força axial

Consideramos as duas vigas apoiadas-apoiadas, cujas condições de contorno, para  $i = 1, 2$ , são

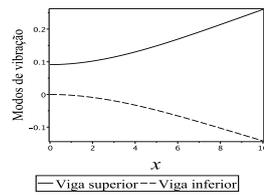
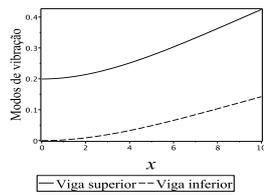
$$u_i(t, 0) = 0, \quad E_i I_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}(t, 0) = 0, \quad u_i(t, L) = 0, \quad E_i I_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}(t, L) = 0. \quad (25)$$

Substituindo equação (4) em equação (25) com  $x = 0$ , e usando as condições iniciais da equação (11), temos  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}''(0) = \mathbf{0}$ , de modo que  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_4 = 0$  em equação (8). Assim  $\mathbf{v}(x) = \mathbf{h}(x)\mathbf{e}_1 + \mathbf{h}''(x)\mathbf{e}_3$ . A equação característica para a viga dupla Euler-Bernoulli apoiada-apoiada com camada viscoelástica e força axial é dada por

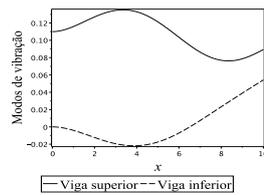
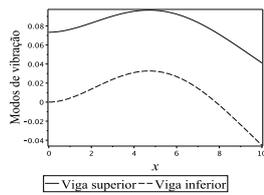
$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{h}(L) & \mathbf{h}''(L) \\ \mathbf{h}''(L) & \mathbf{h}^{(iv)}(L) \end{pmatrix} = 0. \quad (26)$$

Na Tabela 1 são apresentados os valores de  $\lambda$  para os dois casos considerados.

Tabela 1: Autovalores.		
	Caso 1	Caso 2
$\lambda_{11}$	-16,45118711	19.87031132
$\lambda_{12}$	-81,35898238	-28,00750864 I
$\lambda_{21}$	-49,4573-37,7713 I	80-58,42361280 I
$\lambda_{22}$	-39,5508-72,5048 I	-88,39297784 I
$\lambda_{31}$	-57,1120-138,2048 I	80-175,2529689I
$\lambda_{32}$	-12,7511-155,0147 I	-187,3862404 I

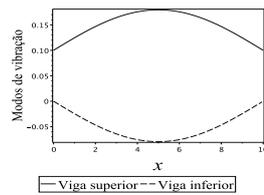
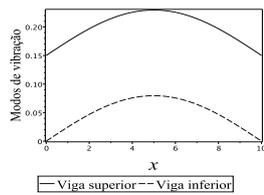


(a) Primeiro modo síncrono  $\lambda_{11}$       (b) Primeiro modo assíncrono  $\lambda_{12}$

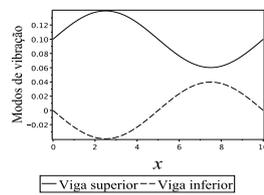
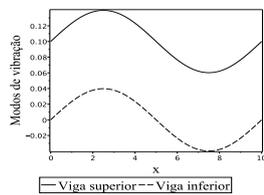


(c) Segundo modo síncrono  $\lambda_{21}$       (d) Segundo modo assíncrono  $\lambda_{22}$

Figura 2: Quatro primeiros modos de vibração para  $\lambda$  dados na Tabela 1 - **CASO 1**. Fonte: autor



(a) Primeiro modo síncrono  $\lambda_{11}$       (b) Primeiro modo assíncrono  $\lambda_{12}$



(c) Segundo modo síncrono  $\lambda_{21}$       (d) Segundo modo assíncrono  $\lambda_{22}$

Figura 3: Quatro primeiros modos de vibração para  $\lambda$  dados na Tabela 1 - **CASO 2**. Fonte: autor

## 5 Considerações Finais

Os resultados analíticos obtidos neste estudo e as simulações realizadas para dois modelos de viga dupla Euler-Bernoulli acoplada por uma camada viscoelástica, mostram que a metodologia proposta, que usa a solução fundamental matricial, pode ser usada para obter a equação característica, as frequências naturais e escrever os modos de vibração. Embora este estudo represente um avanço na compreensão e na modelagem de sistemas de vigas duplas com camada viscoelástica, sabemos que há espaço para futuras investigações. Especificamente, quando consideramos os efeitos da força axial e da fundação elástica simultaneamente, ou quando abordados problemas mais complexos, como quando consideramos outras condições de contorno, respostas livres e forçadas de problemas que envolvem amortecimento nas vigas. Em resumo, este estudo destaca não apenas a eficácia das técnicas analíticas propostas, mas também a importância contínua da pesquisa na dinâmica estrutural para soluções de problemas mais complexos aplicados nas engenharias.

## Referências

- [1] J. C. Claeysen, G. Canahualpa e C Jung. “A direct approach to second-order matrix non-classical vibrating equations”. Em: **Applied Numerical Mathematics** 30.1 (1999), pp. 65–78. DOI: 10.1016/S0168-9274(98)00085-3.
- [2] J. R. Claeysen, T. Tsukazan e R. D. Copetti. “Eigenanalysis of an Euler-Bernoulli model coupled with Van der Waals forces for carbon nanotubes”. Em: **IMA Journal of Applied Mathematics** 78.5 (2013), pp. 1032–1050. DOI: .org/10.1093/imamat/hxs005.
- [3] R. D. Copetti, J. R. Claeysen, D. R. Tolfo e B. S. Pavlack. “The fundamental modal response of elastically connected parallel Timoshenko beams”. Em: **Journal of Sound and Vibration** 530 (2022), p. 116920. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2022.116920>.
- [4] S. G. Kelly. **Advanced Vibration Analysis**. 1a. ed. New York: Taylor & Francis, 2007. ISBN: 9780429132360.
- [5] Q. Mao e N. Wattanasakulpong. “Vibration and stability of a double-beam system interconnected by an elastic foundation under conservative and nonconservative axial forces”. Em: **International Journal of Mechanical Sciences** 93.01 (2015). DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2014.12.019.
- [6] Z. Oniszczyk. “Free transverse vibrations of elastically connected simply supported double-beam complex system”. Em: **Journal of Sound and Vibration** 232.04 (2000), pp. 387–403. DOI: 10.1006/jsvi.1999.2744.
- [7] S. S. Rao. **Vibration of Continuous Systems**. New Jersey: Wiley, 2007. ISBN: 9780471771715.
- [8] M. Rutkoski. “A solução fundamental na obtenção das frequências naturais e autofunções de um sistema de viga dupla Euler-Bernoulli com camada elástica e força axial”. Dissertação de mestrado. Universidade Federal de Santa Maria, 2022.