

# Applet Para Auxílio no Processo de Ensino e Aprendizagem das Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem

Arlyson A. do Nascimento,<sup>1</sup> Jonathan W. L. de A. Lima,<sup>2</sup>  
Enaldo V. de Melo<sup>3</sup>  
IFAL, Maceió, AL

**Resumo.** O artigo em questão apresenta o recorte de um Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) elaborado no curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Alagoas (IFAL), Campus Maceió, no qual é apresentado o resultado do Projeto de Iniciação Tecnológica desenvolvido neste campus. Trata-se, pois, de um *applet* elaborado no *software* GeoGebra como proposta para os estudantes licenciandos conciliarem a parte teórica e prática no componente curricular de Equação Diferencial Ordinária (EDO), possibilitando, especificamente, o estudo com as EDOs Lineares de Segunda Ordem com Coeficientes Constantes. Ao longo do texto discorreremos acerca do seu funcionamento e como este pode proporcionar uma maior interatividade com os problemas.

**Palavras-chave.** Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem, GeoGebra, Applet, Ensino e Aprendizagem

## 1 Introdução

As equações diferenciais têm sua origem na invenção independente do cálculo diferencial e integral feita por Newton e Leibniz durante os anos de 1670 a 1680. Inicialmente, essas equações foram empregadas na solução de problemas geométricos, como determinar uma curva em que as tangentes satisfaziam condições específicas [11].

Modelos que envolvem Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) de Segunda Ordem estão presentes em problemas de várias áreas das Ciências Exatas e da Terra, através de aplicações em mecânica dos fluidos, condução de calor, circuitos elétricos e fenômenos eletromagnéticos.

De acordo com Boyce, Diprima e Meade [6], as equações lineares de segunda ordem tem uma relevância importante nos estudos das equações diferenciais, apresentando uma estrutura teórica rica em que parte considerável dessa estrutura é possível compreender mesmo por aqueles com conhecimentos elementar em matemática. Ainda segundo os autores, o uso de um computador pode ser uma ferramenta bastante útil no estudo das equações diferenciais, mas é preciso considerar as circunstâncias para melhor aproveitamento desse recurso.

Nesse contexto, o GeoGebra se apresenta como um artefato tecnológico para o desenvolvimento de atividades que envolvem EDOs, por tratar-se de um *software* de matemática dinâmico que permite trabalhar com diversos conteúdos abordados no ensino fundamental, médio e superior [16]. Ademais, possui características como livre acesso *on-line* e *off-line* em que permite a interatividade entre docentes e discentes para trabalhar com teoremas matemáticos, construção de conceitos e teste de hipóteses.

---

<sup>1</sup>arlyson.nascimento@ifal.edu.br

<sup>2</sup>jonathamateriais@gmail.com

<sup>3</sup>enaldo.melo@ifal.edu.br

Ainda nessa perspectiva, para Valente [14], quando os alunos utilizam o computador como uma ferramenta para a construção de seu conhecimento, ele passa a ser uma máquina para ser ensinada, permitindo-lhes descrever como resolver problemas, usando linguagens de programação, refletir sobre os resultados alcançados e aprimorar suas ideias ao buscar novos conteúdos e estratégias.

Não é nosso propósito apresentar todas as definições e métodos de solução das equações diferenciais ordinárias. Desse modo, focaremos nos aspectos específicos relevantes para o objetivo deste trabalho, qual seja: apresentar um *applet* desenvolvido no GeoGebra para dar auxílio no processo de ensino e aprendizagem das Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Segunda Ordem.

## 2 O Uso das TDIC no Ensino Superior de Matemática: Desafios a Superar

O uso das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC), como computadores, *tablets*, *smartphones*, internet, *softwares*, aplicativos, e suas várias possibilidades de uso (armazenamento, áudio, vídeo, comunicação síncrona e assíncrona, realidade virtual e aumentada, etc) estão presentes em nosso dia a dia. Não há mais como evitá-las, haja vista que nos auxiliam nas mais variadas atividades do nosso cotidiano, como pedir um almoço, um carro por aplicativo, realizar reuniões, resolver situações financeiras, entre muitas outras, inclusive de lazer, como o uso de jogos digitais.

No entanto, no campo educacional, particularmente na educação básica, tem sido um desafio inserir estes artefatos tecnológicos em sala de aula, como pode ser visto em alguns noticiários [4], dada possivelmente, a imaturidade dessa faixa etária.

Por outro lado, no ensino superior, as experiências têm sido exitosas, mas desafiadoras. O êxito tem sido pelos bons resultados, considerando o processo ensino-aprendizagem, do uso das TDIC em sala de aula, como de softwares e outros artefatos tecnológicos [3, 8, 10]. Na Educação Matemática destacamos, por exemplo, o uso do GeoGebra. Entre os desafios, alguns perpassam pelo seu uso em sala de aula pelos professores, como pode ser evidenciado em algumas pesquisas [2, 9, 15].

Neste sentido, vários trabalhos que são desenvolvidos com vista à aplicação em sala de aula, como este, têm a pretensão de contribuir, não somente para divulgação e incentivo do uso dessas tecnologias visando a melhoria da qualidade do ensino e da aprendizagem, mas para gerar reflexão por parte daqueles que temem ousar mudança de paradigmas quanto à sua prática docente.

## 3 Conceitos Fundamentais das EDOs de Segunda Ordem

Neste seção, apresentaremos os conceitos fundamentais para o entendimento do problema que iremos abordar nos resultados e discussão. Para um maior aprofundamento sobre o tema, ver [13] e [17].

### 3.1 Equação Diferencial Linear de Segunda Ordem

De acordo com Stewart [13], uma equação diferencial linear de segunda ordem tem a forma

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = G(x), \quad (1)$$

em que  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  e  $G$  tratam de funções contínuas.

Dentro do *applet* foi feita a representação da derivada com a notação de Lagrange. Desse modo, sendo as derivadas com relação a  $x$ , temos a seguir uma nova representação da equação (1):

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = G(x). \quad (2)$$

### 3.2 Problema de Valor Inicial

De acordo com [17], um Problema de Valor Inicial (P.V.I) de segunda ordem tem a seguinte forma:

$$\begin{cases} y'' &= f(x, y, y') \\ y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y_1 \end{cases},$$

em que  $x_0, y_0, y_1$  e  $f$  são dados fornecidos.

Essas condições iniciais são essenciais porque muitas equações diferenciais possuem infinitas soluções, e a condição inicial ajuda a determinar uma solução específica que descreve o comportamento do sistema em questão.

## 4 Métodos

A pesquisa, de caráter exploratório [7], deu-se a partir de revisão bibliográfica que objetivou identificar os tipos de problemas que envolvem a solução de uma equação diferencial de segunda ordem e como esta apresenta. Esta exploração visou a criação do *applet* no *software* GeoGebra.

Na construção da janela interativa, foram implementados os recursos necessários para que os estudantes pudessem trabalhar com as EDOs Lineares de Segunda Ordem com Coeficientes Constantes.

É possível observar, na Figura 1, a tela inicial do *applet*, que está disponível em <https://www.geogebra.org/m/wtun3qhj>, em que consta os campos de entrada para as funções, condições iniciais do problema, a solução geral e a solução do P.V.I.

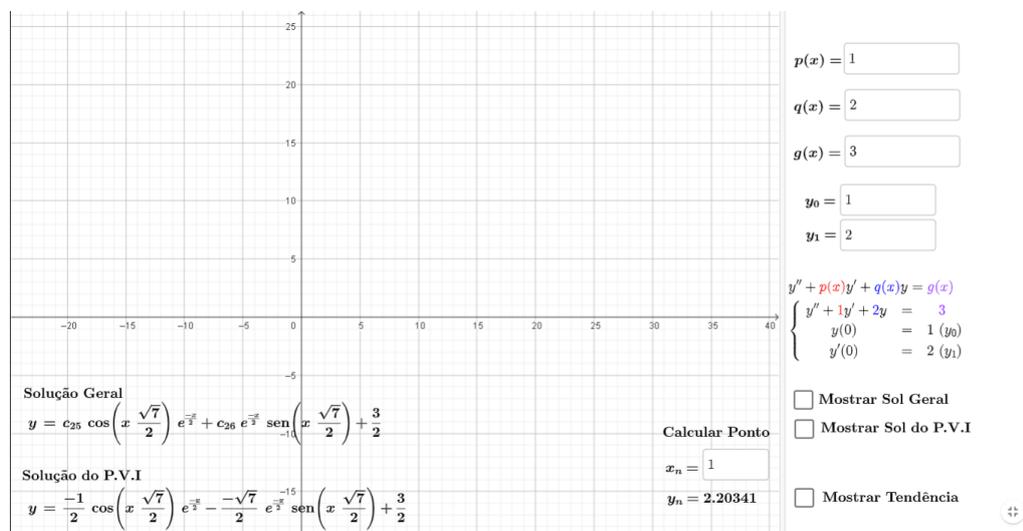


Figura 1: Tela inicial do applet. Fonte: dos autores

O campo de calcular ponto trata de aplicar determinado valor na solução do P.V.I, o qual faremos no exemplo em que iremos abordar.

No *applet*, optamos por representar a EDO no formato

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \tag{3}$$

a qual é possível obtê-la dividindo a equação (2) por  $P(x)$ , em que  $P(x) \neq 0$ , sendo as funções  $p$ ,  $q$  e  $g$  resultantes dessa divisão, ou seja,  $p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ ,  $q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}$  e  $g(x) = \frac{G(x)}{P(x)}$ .

## 5 Resultados e Discussão

Para [1], a técnica de resolução de problemas é uma possibilidade para trabalhar com questões matemáticas, e proporciona ao aluno o estímulo e fortalecimento da capacidade de organização das informações, possibilitando uma aprendizagem mais significativa, pois tende a aproximar os conceitos de situações do cotidiano.

Nesse sentido, citamos a importância dos problemas contextualizados, pois refletem cenários do mundo real e ajudam a mostrar como os conceitos matemáticos são aplicados em diferentes contextos e situações do dia a dia.

Desse modo, o problema a ser discutido neste trabalho trata de um modelo para detecção de diabetes envolvendo uma EDO Linear de Segunda Ordem. Para um melhor aprofundamento sobre como se dá a construção do modelo, ver [12].

**Problema.** A concentração de glicose em 100 ml de sangue de um paciente satisfaz o P.V.I.

$$\begin{cases} G'' + \frac{1}{20}G' + \frac{1}{2500}G = \frac{75}{2500} \\ G(0) = 150 \\ G'(0) = -3,75 \end{cases} \quad (4)$$

após absorver a quantidade de glicose proposta no Teste de Tolerância à Glicose (TTG). Sabendo que a concentração de glicose ideal no sangue desse paciente é de 75 mg de glicose / 100 ml de sangue e que se após as 2 horas a concentração é inferior a 140 mg de glicose / 100 ml de sangue ele não é diabético, verifique se este paciente é diabético ou não.

Ao compararmos a EDO do P.V.I (4) com a equação (3), temos que  $p(x) = \frac{1}{20}$ ,  $q(x) = \frac{1}{2500}$  e  $g(x) = \frac{75}{2500}$ .

Na Figura 1, é possível observar os campos  $y_0$  e  $y_1$ , sendo esses campos, respectivamente, os valores aplicados na função e em sua primeira derivada. Desse modo, a primeira condição inicial é igual a 150 e a outra é  $-3,75$ , logo, temos que  $y_0 = 150$  e  $y_1 = -3,75$ . De posse desses valores, podemos digitá-los em seus respectivos campos dentro do *applet* e, por consequência, a solução geral e do P.V.I do problema irá aparecer no canto inferior esquerdo, ver Figura 2.

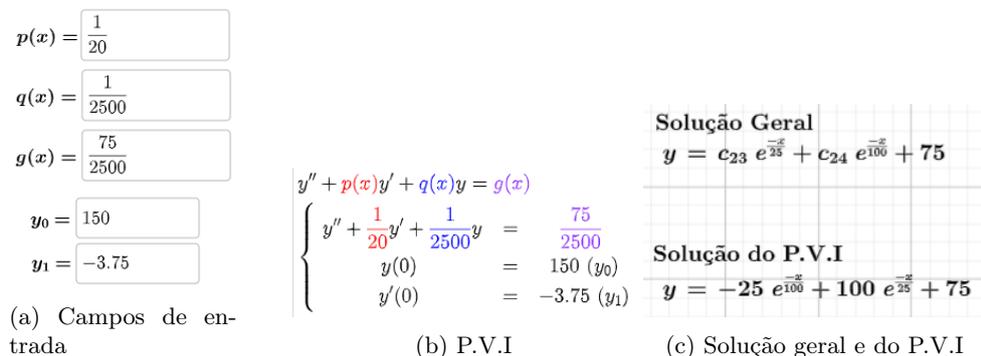


Figura 2: Parâmetros preenchidos e soluções. Fonte: dos autores

Na Figura 2a temos os campos preenchidos e, quando fizermos esse processo, o *applet* já irá atualizar as informações no P.V.I da Figura 2b. Se compararmos o P.V.I (4) com o da Figura 2b, temos a mudança apenas na representação da função, isto é, de  $G$  para  $y$ , o que não afeta o resultado. Já na Figura 2c é possível observar a solução geral e do P.V.I do problema, as quais servem de apoio para os alunos poderem verificar se suas soluções estão corretas.

No canto inferior direito da Figura 1, é possível observar as caixas de **mostrar solução do P.V.I** e **mostrar tendência**, em que é possível exibir a curva solução do problema dadas as condições iniciais e mostrar o comportamento de qualquer solução da EDO do P.V.I (4), ver Figura 3. Caso de início as curvas não apareçam, basta utilizar o botão de rolagem do mouse para dá zoom ou afastar a tela na janela em que é possível observar um plano quadriculado.

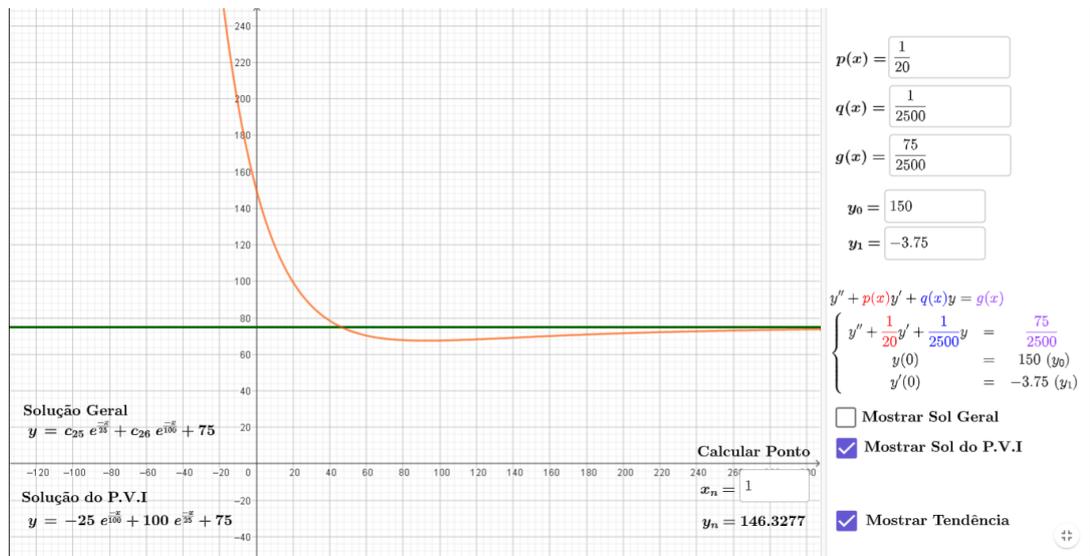


Figura 3: Curva solução do P.V.I e comportamento da família de soluções. Fonte: dos autores

A curva em laranja trata da solução do P.V.I do problema, e a em verde mostra para qual valor as curvas tendem ao longo do tempo. Nesse exemplo, a curva em verde exibe a reta  $y = 75$ , que significa que as curvas tendem a uma quantidade de 75 mg de glicose por 100 ml de sangue.

Por fim, o último parâmetro é o de **calcular ponto**, que significa pegar o valor digitado no campo  $x_n$  e aplicar, em nosso caso, na função  $G$ . No problema que estamos analisando, temos que saber qual a concentração de glicose após 2 horas, isto é, 120 minutos. Nessa perspectiva, basta digitar esse valor na caixa de entrada ao lado de  $x_n$ , e em  $y_n$  irá aparecer o resultado como ilustrado na Figura 4.

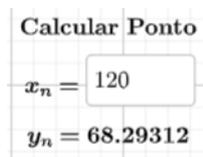


Figura 4: Concentração de glicose no sangue após 120 minutos. Fonte: dos autores

Assim, após 120 minutos, a concentração de glicose no sangue do paciente em questão é aproximadamente igual a 68,293 mg de glicose / 100 ml de sangue, logo, ele não é diabético, pois é

inferior a 140 mg de glicose / 100 ml de sangue.

Para Bassanezi [5] a modelagem matemática baseia-se na arte de transformar problemas do mundo real em matemáticos em que resolvemos e interpretamos suas soluções na linguagem do mundo real. Nesse cenário, encontramos o valor aproximado de 68,293, e esse valor representa algo para nós, isto é, trata da concentração de glicose no sangue após 120 minutos.

Ao falarem sobre o uso das equações diferenciais [6], os autores citam que é de extrema importância a compreensão dos métodos de solução, mas que tarefas repetitivas podem ser delegadas a um computador. Nesse sentido, o *applet* apresentado neste trabalho possibilita o teste de vários cenários em que os alunos poderão alterar todos os parâmetros do problema para verificar o comportamento da solução, processo esse que às vezes pode ser bastante complexo de ser feito de forma algébrica.

## 6 Considerações Finais

O emprego de recursos tecnológicos dentro da sala de aula serve de auxílio para o aprendizado dos alunos e proporciona ao professor mais uma ferramenta pedagógica para abordar determinados conteúdos nas aulas.

Sob esse olhar, o *applet* apresentado neste trabalho pode possibilitar a análise gráfica mais precisa, permitir a modificação dos parâmetros de forma mais rápida e ainda é possível observar como as mudanças das condições iniciais afetam as soluções do problema em tempo real. Ademais, é possível estudar as tendências das famílias de soluções das equações diferenciais de segunda ordem fornecidas nos problemas.

Desse modo, acreditamos que esse recurso digital educacional poderá ser útil para professores que lecionam a disciplina de Equação Diferencial Ordinária (EDO), em específico com o tópico das EDOs Lineares de Segunda Ordem com Coeficientes Constantes, da mesma maneira que pode servir como ferramenta auxiliar durante o processo de ensino e aprendizagem dos alunos.

## Agradecimentos

Os agradecimentos vão para o Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) por ter financiado o projeto de pesquisa em que foi possível criar o *applet* que apresentamos neste trabalho, e ao Instituto Federal de Alagoas (IFAL) pelo espaço de apresentação do projeto.

## Referências

- [1] A. M. Angelin. “Semelhança de triângulos: atividades práticas com o auxílio do geogebra”. Dissertação de mestrado. Universidade Federal de Santa Maria, 2019.
- [2] V. H. R. B. Antunes e R. A. G. Cibotto. “Retratos de (ausências de) práticas educativas utilizando TDIC em aulas de Matemática na Educação Básica”. Em: **Revista Eletrônica de Educação** 15 (2021), e4944059. DOI: 10.14244/198271994944.
- [3] W. M. de A. Aviz, A. E. R. Vasconcelos e C. de O. Lozada. “O uso dos aplicativos Photomath e Toon Math no ensino de matemática”. Em: **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática** 8.23 (2021), pp. 721–737. DOI: 10.30938/bocehm.v8i23.5142.
- [4] P. F. de Barros. **Noruega planeja proibir o uso de telefones celulares nas escolas em 2024**. Online. Acessado em 01/03/2024, <https://dunapress.com/2023/11/05/noruega-planeja-proibir-o-uso-de-telefones-celulares-nas-escolas-em-2024/>.

- [5] R. C. Bassanezi. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. Editora Contexto, 2002.
- [6] W. E. Boyce, R. C. Diprima e D. B. Meade. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, 11th Edition**. 11<sup>a</sup> ed. Editora LTC, 2020. ISBN: 978-85-216-3712-7.
- [7] S. Claire et al. **Métodos de pesquisa nas relações sociais**. 2<sup>a</sup> ed. EPU, 1967.
- [8] V. R. Lopes e S. Scherer. “Cálculo Diferencial e Integral e o Uso de Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação: uma discussão de pesquisas nos últimos onze anos”. Em: **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática** 11.2 (2018), pp. 145–159.
- [9] D. Marin. “O desafio da implementação de tecnologia informática em disciplinas de matemática no ensino superior”. Em: **Revista Profissão Docente** 12.25 (2012), pp. 28–40. DOI: 10.31496/rpd.v12i25.522.
- [10] V. M. L. S. de Melo, B. R. S. de Melo e A. M. da C. Silvano. “O ensino de Ciências Exatas e Naturais na Educação Básica: contribuições dos objetos de aprendizagem”. Em: **REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática** 9.1 (2021), e21022.
- [11] P. do N. Nobrega. **Equações Diferenciais**. 2<sup>a</sup> ed. Fundação Cecierj, 2019. ISBN: 9788545802082.
- [12] L. H. da Silva. “Equações diferenciais ordinárias e suas aplicações”. Dissertação de mestrado. Universidade de São Paulo, 2020.
- [13] J. Stewart. **Cálculo 2**. 7<sup>a</sup> ed. Cengage, 2013. ISBN: 9788522114634.
- [14] J. A. Valente et al. “Informática na educação no Brasil: análise e contextualização histórica”. Em: **O computador na sociedade do conhecimento. Campinas: UNICAMP/NIED** (1999), pp. 1–13.
- [15] C. A. de Vasconcelos e E. V. Oliveira. “TIC no ensino e na formação de professores: reflexões a partir da prática docente”. Em: **Revista Brasileira de Ensino Superior** 3.1 (2017), pp. 112–132. DOI: 10.18256/2447-3944/rebes.v7n1p112-132.
- [16] D. A. de F. Vaz e P. C. C. de Jesus. “Uma Sequência Didática para o Ensino da Matemática com o Software Geogebra”. Em: **Revista EVS-Revista de Ciências Ambientais e Saúde** 41.1 (2014), pp. 59–75. DOI: 10.18224/est.v41i1.3365.
- [17] J. N. A. Yartey e S. S. Ribeiro. **Equações diferenciais**. Salvador: UFBA, Instituto de Matemática e Estatística; Superintendência de Educação a Distância, 2017. ISBN: 97882921432.