

Efeito de Memória no Modelo SIR via Derivadas Fracionárias e Equações Diferenciais com Retardamento com Aplicação nos Casos da Dengue no Distrito Federal do Brasil

André Carlos N. M. da Silva¹, Michele M. Lopes², Laécio C. de Barros³
IMECC/UNICAMP, Campinas, SP

Resumo. O cálculo fracionário tem sido muito usado na modelagem de fenômenos dinâmicos e tem como principal vantagem o efeito de memória do sistema em mãos. As equações com retardo também têm a mesma vantagem. Porém, diferentemente do primeiro caso, as últimas trazem explicitamente o parâmetro que se refere à memória. O objetivo deste trabalho é usar o modelo epidemiológico SIR para destacar o cálculo fracionário e as equações com retardamento comparando suas soluções com aquelas via equações diferenciais clássicas no estudo da evolução de casos ativos da dengue no Distrito Federal do Brasil.

Palavras-chave. Memória, Cálculo Fracionário, Equações Com Retardamento

1 Introdução

O cálculo fracionário originou-se, possivelmente, em 1695, generalizando o cálculo de ordem inteira, assim é possível definir integrais e derivadas de ordens arbitrárias. Desde a sua criação, Euler, Fourier, Laplace, Abel, Liouville, entre outros, deram várias contribuições para o cálculo fracionário, no entanto, houve um período em que ele ficou em desuso e foi a partir da década de 1990 que teve uma explosão do uso em diversas áreas [2]. As equações diferenciais com retardamento são um tipo mais geral de equações diferenciais, frequentemente designadas por equações diferenciais funcionais, as quais são aquelas em que as funções ocorrem com vários argumentos diferentes, mais detalhes sobre estas equações podemos ver em [7]. As equações diferenciais fracionárias e as equações diferenciais com retardamento possuem uma característica em comum, pois ambas capturaram uma dependência de estados anteriores, o que nos permite observar o fenômeno de memória nestes modelos.

O trabalho está dividido da seguinte forma: na Seção 2, apresentamos algumas definições importantes do trabalho; na Seção 3, entendemos o efeito de histerese e apresentamos uma ferramenta muito importante desenvolvida por [1] que nos ajuda a analisar melhor o efeito de memória no cálculo fracionário; na Seção 4, apresentamos o principal objetivo do trabalho, que é entender o comportamento do modelo SIR, quando analisado de três pontos de vista, a forma sem memória (clássica), quando comparada com as formas com memória (fracionária e a com retardamento); na Seção 5, encerramos com uma aplicação numérica com os dados da dengue no Distrito Federal do Brasil, em que é possível observar o efeito de memória no cálculo fracionário e nas equações diferenciais com retardamento.

¹a230144@dac.unicamp.br

²lopesmm@ime.unicamp.br

³laecioba@unicamp.br

2 Preliminares

Definição 2.1. (Integral Fracionária de Riemann-Liouville [1]) Seja $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $b > 0$ e $f \in L^p([0, b] : \mathbb{R}^m)$, com $1 \leq p \leq \infty$. A integral fracionária de Riemann-Liouville, para $t \in [0, b]$, de ordem α , é dada por:

$$J_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \tag{1}$$

em que $\Gamma(\alpha)$ é a função gama.

Definição 2.2. (Derivada Fracionária de Riemann-Liouville [1]) Seja $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $b > 0$, $f \in AC^n[0, b]$ e $n = [\alpha] + 1$. A derivada fracionária de Riemann-Liouville de ordem α é dada por:

$$\begin{aligned} {}^{rl}D_t^\alpha f(t) &:= D_t^n J_t^{n-\alpha} f(t) \\ &= \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds \right), \end{aligned} \tag{2}$$

em que $AC^n[0, b]$ é o conjunto das funções para a qual a derivada de ordem $n - 1$ é absolutamente contínua em $[0, b]$.

Definição 2.3. (Derivada de Caputo [1],[2]) Seja $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $b > 0$, $f \in AC^n[0, b]$ e $n = [\alpha] + 1$. A derivada fracionária de Caputo de ordem α é dada por:

$${}^cD_t^\alpha f(t) := \left({}^{rl}D_x^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right] \right) (t). \tag{3}$$

Além do mais, [2] mostra que, com as condições acima, temos:

$$\begin{aligned} {}^cD_t^\alpha f(t) &:= J_t^{n-\alpha} f^{(n)}(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds. \end{aligned} \tag{4}$$

em que $f^{(n)}(t)$ é a usual n -ésima derivada de $f(t)$.

Definição 2.4. (Função de Mittag-Leffler [5]) Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ números estritamente positivos. A função de Mittag-Leffler com dois parâmetros $E_{\alpha,\beta} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é dada por:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}. \tag{5}$$

Denotamos $E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_\alpha(z)$ que é uma função de Mittag-Leffler com parâmetro α . Neste caso, quando $\alpha = 1$, recupera-se a função exponencial, isto é,

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z. \tag{6}$$

As equações diferenciais fracionárias geralmente são resolvidas de forma analítica, usando as transformadas de Laplace, como podemos ver em [2] e [5].

Exemplo 2.1. *A equação diferencial fracionária*

$${}^c D_t^\alpha x(t) = -c^\alpha x(t), \tag{7}$$

com $\alpha \in (0, 1]$, é uma generalização para derivada fracionária de Caputo da equação de Malthus e possui solução $x(t) = E_\alpha(-c^\alpha t^\alpha)$. De fato, quando $\alpha = 1$, recuperamos o modelo malthusiano clássico, cuja equação é dada por $x'(t) = -cx(t)$ e solução $x(t) = e^{-ct}$.

Definição 2.5. *[Equações Diferenciais Com Retardamento [3]]* As Equações diferenciais com retardamento são um tipo de equação diferencial, em que a derivada em um instante t depende da função incógnita em um instante anterior $t - \tau$, com $\tau > 0$, denominado retardamento.

$$y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau)), \text{ com } t \geq 0. \tag{8}$$

As equações diferenciais com retardamento podem ser resolvidas de forma analítica, usando as transformadas de Laplace e, algumas vezes, com o uso do método dos steps, mas, no geral, são resolvidas de forma numérica, como podemos ver em [4] e [7].

Exemplo 2.2. *O modelo malthusiano citado no exemplo (2.1) pode ser generalizado para equações com retardamento, assim a equação*

$$y'(t) = -cy(t - \tau), \tag{9}$$

com $\tau > 0$, é um caso de equação diferencial com retardamento.

Neste caso, considerando o problema de valor inicial, $y_1(t) = y_0$ para $-\tau \leq t \leq 0$, que chamamos de história da função, $y'_1(t) = -cy_1(t - \tau)$ e usando o método dos steps N vezes teremos:

$$y(t) \approx y_N = \sum_{j=0}^N \frac{(-1)^j c^j y_0}{j!} [t - (j - 1)\tau]^j. \tag{10}$$

Segundo [7], a equação (9) também pode ser reescrita como

$$y'(t) = -c \int_{-\infty}^t w(t - s)y(s)ds, \tag{11}$$

em que $w(t)$ é um fator de ponderação que indica a importância que deve ser dada ao tamanho de y em momentos anteriores para determinar o efeito atual.

3 Fenômeno de Histerese

Os modelos markovianos são classificados como aqueles que não têm memória, a equação de Malthus clássica é um caso elementar desse tipo de fenômeno. No entanto, quando o estado atual de um sistema é influenciado pela dinâmica de seu passado histórico, diz-se que tal sistema apresenta o fenômeno de histerese e, diante disso, é classificado como um caso especial de efeito de memória. Em geral, a histerese é um tipo de janela de memória não limitada (ou seja, limitada a partir da origem). Portanto, pode ser formulada matematicamente com um núcleo de convolução desde a origem. Este é um núcleo típico usado para definir operadores fracionários integrais e diferenciais, como a derivada de Caputo. Estes núcleos também são vistos quando analisamos equações com retardamento. Na próxima seção, veremos um dispositivo desenvolvido por [1] que usa a teoria de estatística para observar o efeito de histerese no cálculo fracionário.

3.1 Abordagem Estatística para os Operadores Fracionários

Proposição 3.1. [1] *Seja $\alpha \in \mathbb{R}^+$ e $f \in AC[0, b]$. Com essas condições, teremos:*

$$J_t^\alpha f(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} E[f(tU)]; \tag{12}$$

$${}^{rl}D_t^\alpha f(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} E[f(tW)] + \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(3 - \alpha)} E[f'(tV)], \text{ se } 0 < \alpha < 1; \tag{13}$$

$${}^cD_t^\alpha f(t) = \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2 - \alpha)} E[f'(tW)], \text{ se } 0 < \alpha < 1, \tag{14}$$

em que U, V e W são variáveis aleatórias com distribuições beta, $U \sim B(1, \alpha), V \sim B(2, 1 - \alpha)$ e $W \sim B(1, 1 - \alpha)$.

Demonstração 3.1. *Pode ser encontrada em [1].*

O estudo feito por [1] revela que os operadores fracionários podem ser interpretados a partir da abordagem estatística, por meio da esperança matemática, em que a história passada do sistema segue uma distribuição beta. Os autores observam que o parâmetro $\alpha \in (0, 1)$ e que quanto mais próximo de zero é α maior será o efeito de memória da função.

4 Modelos Matemáticos

Nesta seção, iremos apresentar os modelos matemáticos com os quais trabalhamos, o modelo SIR clássico, o modelo SIR fracionário e o modelo SIR com retardamento, estudando as suas evoluções.

4.1 Modelo SIR Clássico

O modelo epidemiológico SIR é um modelo comportamental simples proposto por Kermack e McKendrick (1927), estudado por muitos pontos de vista e é bastante usado nos estudos de evolução de várias doenças. Neste modelo, a população de N indivíduos é dividida em três compartimentos: Suscetíveis (S), Infectados (I) e Recuperados (R).

Assim $N = S + I + R$, sendo o aumento na classe dos infectados proporcional ao número de pessoas infectadas e suscetíveis, isto é, $\beta IS/N$, cujo parâmetro contante $\beta > 0$ é uma taxa de contágio. As pessoas suscetíveis diminuem com a mesma taxa. A taxa de remoção de infecciosos para a classe recuperados é proporcional ao número de pessoas infectadas, ou seja, γI em que $\gamma > 0$ é uma constante, em que $\frac{1}{\gamma}$ é uma medida do tempo de permanência no estado dos infecciosos. O período de incubação é, neste caso, negligenciado; ou seja, uma pessoa suscetível, que contraia a doença, é infectado imediatamente.

Sendo originalmete o modelo dado por:

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta I(t) \frac{S(t)}{N} \\ I'(t) = \beta I(t) \frac{S(t)}{N} - \gamma I(t) . \\ R'(t) = \gamma I(t) \end{cases} \tag{15}$$

Podemos fazer a transformação $s = \frac{S}{N}, i = \frac{I}{N}, r = \frac{R}{N}$, assim o sistema toma a forma:

$$\begin{cases} s'(t) = -\beta s(t)i(t) \\ i'(t) = \beta s(t)i(t) - \gamma i(t) . \\ r'(t) = \gamma i(t) \end{cases} \tag{16}$$

Desta forma, podemos considerar a proporção da população, isto é, $s(t), i(t), r(t) \in [0, 1]$. Logo, teremos $s(t) + i(t) + r(t) = 1$, assim $s'(t) + i'(t) + r'(t) = 0$.

Então, supondo o aparecimento de uma fração de indivíduos infectados, ou seja, fazendo $s(0) = s_0 > 0$, $i(0) = i_0 > 0$ e $r(0) = 0$, pela segunda equação do sistema (16), temos que $i'(0) > 0$ que é equivalente a $\frac{\beta s_0}{\gamma} > 1$. Isto é, o valor de reprodutibilidade basal $R_0 = \frac{\beta s_0}{\gamma} > 1$, indicando que a doença torna-se edêmica.

Podemos obter algumas importantes informações a partir deste modelo simples. Por exemplo, da 1ª e 2ª equações do sistema (16) temos:

$$\frac{di}{ds} = -1 + \frac{\gamma}{\beta s}. \tag{17}$$

A integração da equação (17) fornece as trajetórias do plano de fase (s, i) , dadas pela relação:

$$i(t) + s(t) - \frac{\gamma}{\beta} \ln s(t) = \text{const} = i_0 + s_0 - \frac{\gamma}{\beta} \ln s_0 = 1 - \frac{\gamma}{\beta} \ln s_0. \tag{18}$$

Também, fazendo $i'(t) = 0$ em (16) e $\rho = \frac{\gamma}{\beta}$ em (18), temos i_{max} :

$$i_{max} = 1 - \rho + \rho \ln \frac{\rho}{s_0} = 1 - \rho + \rho \ln \frac{1}{R_0}, \tag{19}$$

em que i_{max} representa o valor máximo de infectados no modelo SIR clássico e seu valor é dado a partir dos parâmetros básicos da doença. No entanto, verifica-se em [4] que esse modelo pode ser “melhorado” para representar uma epidemia. Por exemplo, histórico ou memória nos sistemas epidemiológicos são de extrema relevância na evolução de uma epidemia, principalmente em efeitos de controle [1]. Estes casos costumam ser modelados por meio das equações fracionárias e aquelas com retardamento.

4.2 Modelo SIR Fracionário (Derivada de Caputo)

A versão fracionária, a qual contém um efeito de memória como dado por [1], segue como:

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha s(t) = -\beta^\alpha s(t)i(t) \\ {}^c D_t^\alpha i(t) = \beta^\alpha s(t)i(t) - \gamma^\alpha i(t) \\ {}^c D_t^\alpha r(t) = \gamma^\alpha i(t) \end{cases} \tag{20}$$

Em que ${}^c D_t^\alpha x(t)$ é a derivada de Caputo de ordem $\alpha \in (0, 1]$. Os parâmetros são elevados à potência α no lado direito do sistema devido à análise dimensional, uma vez que o operador derivada fracionária ${}^c D_t^\alpha s(t)$ tem dimensão $(\text{tempo})^{-\alpha}$ em vez de $(\text{tempo})^{-1}$. Então, no modelo (20) a dimensão dos parâmetros são β^α e γ^α , respectivamente, população $\times (\text{tempo})^{-\alpha}$. Podemos definir o número de reprodutibilidade basal $R_0^\alpha = \frac{\beta^\alpha}{\gamma^\alpha} s_0$ e fazer um estudo similar ao caso clássico com esse modelo.

De acordo com a equação (14), para $\alpha \in (0, 1)$,

$${}^c D_t^\alpha i(t) = \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} E [i'(tW)], \tag{21}$$

em que W é uma variável aleatória com distribuição beta com parâmetros 1 e $1 - \alpha$, isto é, $W \sim B(1, 1 - \alpha)$. Assim, ${}^c D_t^\alpha i(t)$ está relacionada com a esperança matemática de $i'(s)$, $0 \leq s \leq t$. Dessa forma, quando $i'(t) \geq 0$, teremos necessariamente que ${}^c D_t^\alpha i(t) \geq 0$. Estamos estudando como estas implicações interferem na estabilidade do sistema.

4.3 Modelo SIR com Retardamento

Voltando ao modelo SIR clássico, observamos que ele não é o ideal, pois não inclui um efeito de retardo no tempo para indivíduos infectados e recuperados, assim iremos analisar o modelo SIR clássico quando é aplicado um retardamento nas equações. Em [6], é apresentado um modelo em que a implicação é que as pessoas suscetíveis não são imediatamente infectadas no momento, quando eles entram em contato com o vírus, mas deve haver um período de atraso da doença que chamamos de incubação. O efeito de atraso de tempo pode ser aplicado às pessoas em recuperação, o que significa que as pessoas infectadas não se tornam imediatamente pessoas recuperadas.

$$\begin{cases} s'(t) = -\beta s(t)i(t - \tau_1) \\ i'(t) = \beta s(t)i(t - \tau_1) - \gamma i(t - \tau_2) . \\ r'(t) = \gamma i(t - \tau_2) \end{cases} \quad (22)$$

Em que τ_1 e τ_2 representam os efeitos do atraso no tempo para os indivíduos infectados e recuperados, respetivamente. No modelo em questão, nós temos $i'(t) > 0$ quando $\beta s(t)i(t - \tau_1) - \gamma i(t - \tau_2) > 0$, que assumindo $s = s_0 > 0$, $i(t - \tau_1) > 0$ e $i(t - \tau_2) > 0$. Temos $R_0^* = \frac{\beta s_0}{\gamma} \frac{i(t - \tau_1)}{i(t - \tau_2)} > 1$, sabendo que, nesse caso, teremos o fator $R_i = \frac{i(t - \tau_1)}{i(t - \tau_2)}$ interferindo no efeito do modelo. Estamos estudando essa interferência e como os produtos de convolução se comportam quando aplicados no modelo (22) e seus respectivos pontos de estabilidades. Podemos encontrar mais detalhes sobre estes modelos em [4].

5 Aplicação Numérica

O exemplo dado reflete o comportamento da evolução em proporção de casos ativos notificados semanais da dengue no Distrito Federal do Brasil nas 40 primeiras semanas do ano de 2023. A escolha do Distrito Federal foi realizada, pois teve uma alta significativas de casos na data da escrita deste artigo, então nos propomos entender a evolução. Os dados foram coletados no site datasus do ministério de saúde do governo brasileiro [8], que disponibiliza dados que podem servir para subsidiar análises objetivas da situação sanitária, tomadas de decisão baseadas em evidências e elaboração de programas de ações de saúde. Com uso dos modelos epidemiológicos SIR estudados acima, é feita a comparação entre o modelo sem memória (clássico) e os modelos com memória (fracionários e com retardo). Para calcular os parâmetros foi usado o pacote (fde12) para os casos clássico e fracionário; e o pacote (dde23) para o caso com retardamento, todos no software MATLAB versão R2023a.

Os valores dos parâmetros α , β e γ , no caso fracionário, foram obtidos através de ajuste de dados pelo método dos quadrados mínimos. O mesmo procedimento foi usado para encontrar β e γ no caso clássico, em que observamos que o caso fracionário obteve um erro menor. Para o caso com retardamento foi considerado $\tau_1 = 5/7$ que é o período de incubação da dengue que é em média de 5 dias e dividimos por 7, uma vez que estamos com escala semanal. De forma similar, temos que o período de recuperação da dengue é de 10 dias em média, assim temos $\tau_2 = 10/7$. Neste caso, usamos β e γ encontrados no caso clássico para efeito de comparação.

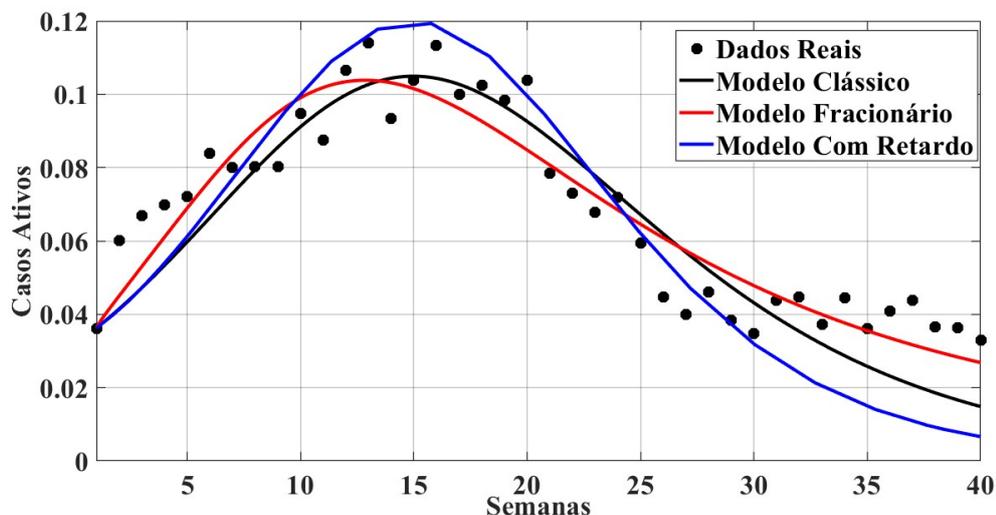


Figura 1: Soluções com os modelos (16), (20) e (22) de casos ativos semanais que descrevem o espalhamento da dengue no Distrito Federal. O caso fracionário $\alpha = 0,8474$, $\beta = 0,5323$ e $\gamma = 0,2948$. Nos casos clássico e com retardo $\beta = 0,4076$ e $\gamma = 0,2541$. Sendo $\tau_1 = 5/7$ e $\tau_2 = 10/7$ no caso com retardamento. Em todos os casos foram considerados $N = 10000$. Fonte: dos autores.

Nota-se que a curva dos dados reais do Distrito Federal possui o pico na semana 13 e tem uma calda mais larga do que os modelos clássicos e com retardo. Os parâmetros τ_1 e τ_2 , que estão associados à memória no caso com retardamento, fazem a curva desse modelo ter uma maior aproximação ao pico da curva de dados reais. Por outro lado, analisando o erro, a solução fracionária ajusta-se melhor aos dados devido à liberdade do parâmetro α , que também está associado ao efeito de memória.

Referências

- [1] L.C. Barros, M.M. Lopes, F.S. Pedro, E. Esmi, J.P.C. dos Santos e D. E. Sánchez. “The Memory Effect on Fractional Calculus: An Application in the Spread of Covid-19”. Em: **Computational and Applied Mathematics** 40 (2021), pp. 1–21.
- [2] R.F. Camargo e E.C. Oliveira. **Cálculo Fracionário**. S.Paulo: LF Editorial, 2015, 131p.
- [3] F.Longo. “Equações diferenciais com retardamento aplicadas a respiração humana”. Dissertação de mestrado. Unicamp, 2020.
- [4] M. F. C. Gomes. “Dinâmica de Epidemias: Efeitos de Atraso e das Interações entre agentes”. Tese de doutorado. UFRGS, 2011.
- [5] M. M. Lopes. “Fractional calculus and fuzzy sets theory: a study with epidemiological models for COVID-19”. Tese de doutorado. Unicamp, 2023.
- [6] M. Maleewong. “Time delay epidemic model for COVID-19”. Em: **medRxiv** (2020). DOI: <https://doi.org/10.1101/2020.05.23.20111500>, p. 36.
- [7] J. D. Murray. **Mathematical Biology: I an Introduction**. New York: Springer, 2002, 14p.
- [8] Ministério da Saúde. **Datasus**. Online. Acessado em 25/03/2024, <https://datasus.saude.gov.br/informacoes-de-saude-tabnet/>.