Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Um Princípio do Máximo Fraco para Problemas de Controle Ótimo com Custo Intervalar

Fabiola R. Villanueva[1]
Universidad Mayor de San Andrés, Carrera de Matemática, La Paz, Bolivia
Valeriano A. de Oliveira[2]
Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Câmpus de São José do Rio Preto, SP

Resumo. O estudo de problemas de otimização com custo intervalar é relevante devido a sua aplicabilidade a situações envolvendo incerteza. O princípio do máximo é conhecido como um conjunto de condições necessárias de otimalidade para problemas de controle ótimo. Neste trabalho, apresentamos um princípio do máximo fraco para uma classe de problemas de controle ótimo cuja função objetivo toma valores intervalares. Os resultados foram derivados após a aplicação de uma generalização do formalismo de Dubovitskii-Milyutin para problemas a valores intervalares. As condições de otimalidade são expressas por meio do gradiente generalizado de Hukuhara (gH-gradiente) da função objetivo intervalar.

Palavras-chave. Controle Ótimo, Otimização Intervalar, Princípio do Máximo, Formalismo de Dubovitskii-Milyutin, gH-gradiente

1 Introdução

É bem conhecido a importância da teoria de controle ótimo na modelagem e resolução de diversos problemas reais. Igualmente, é bem conhecido a relevância do estudo de problemas de otimização com função objetivo a valores intervalares, visto que em muitas situações os modelos determinísticos são inviáveis devido a presença de incerteza nos dados ou até mesmo devido à própria natureza do problema. Neste trabalho, vamos contemplar ambos os cenários: consideraremos problemas de controle ótimo com custo intervalar.

Na literatura podemos encontrar alguns poucos estudos envolvendo este assunto especificamente. Vamos citar as referências [1, 2, 4–6, 9]. Convidamos o leitor a consultá-las para acessar boas revisões bibliográficas concernentes a este tópico.

As condições necessárias de otimalidade para problemas de controle ótimo são comumente dadas pelo princípio do máximo em suas versões fraca e/ou forte e expressas por meio da função Hamiltoniana. O principal objetivo deste trabalho é apresentar uma versão do princípio do máximo fraco para problemas de controle ótimo intervalares. Os resultados são deduzidos pela aplicação de uma especificação do célebre formalismo de Dubovitskii-Milyutin para problemas com função custo intervalar. Tal especificação foi obtida em [8]. As condições de otimalidade são expressas na forma Hamiltoniana e usando o gradiente generalizado de Hukuhara (gH-gradiente) da função objetivo. O gH-gradiente é um tipo de derivada adequado (genuíno) para funções intervalares.

O trabalho está organizado da seguinte forma. Começamos com alguns preliminares na próxima seção. O problema de controle ótimo intervalar é enunciado na Seção 3. Os resultados principais estão na Seção 4.

[1] fvillanueva@fcpn.edu.bo
[2] valeriano.oliveira@unesp.br

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0496

2 Preliminares

Denotamos $\mathcal{K}_C = \{[\underline{a}, \overline{a}] : \underline{a}, \overline{a} \in \mathbb{R},\ \underline{a} \leq \overline{a}\}$. Usamos as operações usuais de soma e multiplicação por escalar em $\mathcal{K}_C$. Com relação à operação de diferença, usaremos a diferença generalizada de Hukuhara (gH-diferença). Munindo $\mathcal{K}_C$ com a métrica d_H de Pompeiu-Hausdorff, obteremos o espaço métrico completo $(\mathcal{K}_C, d_H)$.

Sejam $A = [\underline{a}, \overline{a}]$ e $B = \left[\underline{b}, \overline{b}\right] \in \mathcal{K}_C$. A relação de ordem superior-inferior, conhecida por LU (do inglês lower-upper), é definida como $A <_{LU} B \Leftrightarrow \underline{a} < \underline{b}$ e $\overline{a} < \overline{b}$.

Se $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, vamos escrever $A \oplus v := ([\underline{a}_1, \overline{a}_1] + [v_1, v_1], \ldots, [\underline{a}_n, \overline{a}_n] + [v_n, v_n])$.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, denotamos $[a \vee b] = [\min\{a, b\}, \max\{a, b\}] \in \mathcal{K}_C$.

Sejam $F = \left[\underline{f}, \overline{f}\right] : \mathbb{R}^n \to \mathcal{K}_C$ uma função intervalar gH-diferenciável no ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$. Então $\underline{f}$ e $\overline{f}$ possuem todas as derivadas parciais laterais em x^*. Ver Villanueva e de Oliveira [8]. Usaremos a seguinte notação:

$$\frac{\partial \underline{f}}{\partial x_i^\sharp}(x^*) = \begin{cases} \frac{\partial \underline{f}}{\partial x_i}(x^*), & \text{se existir,} \\ \frac{\partial \underline{f}}{\partial x_i^-}(x^*), & \text{caso contrário,} \end{cases} \qquad \frac{\partial \overline{f}}{\partial x_i^\sharp}(x^*) = \begin{cases} \frac{\partial \overline{f}}{\partial x_i}(x^*), & \text{se existir,} \\ \frac{\partial \overline{f}}{\partial x_i^-}(x^*), & \text{caso contrário,} \end{cases} \tag{1}$$

$$\frac{\partial_{gH} F}{\partial x_i}(x^*) = \left[\frac{\partial \underline{f}}{\partial x_i^\sharp}(x^*) \vee \frac{\partial \overline{f}}{\partial x_i^\sharp}(x^*)\right], \quad \nabla_{gH} F(x^*) = \left(\frac{\partial_{gH} F}{\partial x_1}(x^*), \ldots, \frac{\partial_{gH} F}{\partial x_n}(x^*)\right). \tag{2}$$

Denotaremos ainda

$$\nabla_\sharp \underline{f}(x^*) = \begin{cases} \nabla \underline{f}(x^*), & \text{se existir,} \\ \nabla \underline{f}_-(x^*), & \text{caso contrário,} \end{cases} \qquad \nabla_\sharp \overline{f}(x^*) = \begin{cases} \nabla \overline{f}(x^*), & \text{se existir,} \\ \nabla \overline{f}_-(x^*), & \text{caso contrário,} \end{cases} \tag{3}$$

onde $\nabla \underline{f}_-(x^*)$ e $\nabla \overline{f}_-(x^*)$ denotam os vetores formados pelas derivadas laterais à esquerda de $\underline{f}$ e $\overline{f}$ em x^*, respectivamente. Com esta notação, a derivada gH-direcional de F em x^* na direção $d \in \mathbb{R}^n$ é caracterizada como

$$F'_{gH}(x^*; d) = \left[\nabla_\sharp \underline{f}(x^*)^\top d \vee \nabla_\sharp \overline{f}(x^*)^\top d\right]. \tag{4}$$

Seja $F = \left[\underline{f}, \overline{f}\right] : [a, b] \to \mathcal{K}_C$ uma função a valores intervalares. Então, F é integrável (no sentido de Aumann) se, e somente se, $\underline{f}$ e $\overline{f}$ são integráveis (no sentido clássico). Além disso,

$$\int_a^b F(t)dt = \left[\int_a^b \underline{f}(t)dt, \int_a^b \overline{f}(t)dt\right]. \tag{5}$$

Para mais detalhes de notação, conceitos e resultados citados nesta seção, convidamos o leitor a consultar as referências [7, 8].

Finalizamos a seção com mais duas notações. Denotaremos por B a bola unitária centrada na origem nos espaços Euclidianos, independentemente da dimensão. Dado um cone K com vértice na origem em um espaço de Banach E, o cone dual de K é definido como $K^* := \{\phi \in E^* : \phi(x) \geq 0\ \forall x \in E\}$.

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0496

3 O Problema de Controle Ótimo Intervalar

Vamos deduzir o princípio do máximo fraco para o seguinte problema de controle ótimo intervalar:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & J(x,u) = \displaystyle\int_0^T L(t,x(t),u(t))dt \\ \text{sobre} & (x,u) \in E := C([0,T];\mathbb{R}^n) \times L_\infty([0,T];\mathbb{R}^m) \\ & \dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)) \text{ q.s. em } [0,T], \\ & x(0) = x_0, \\ & u(t) \in U \text{ q.s. em } [0,T], \end{array} \tag{PCOI}$$

onde $L = \left[\underline{L}, \overline{L}\right] : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathcal{K}_C$, $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$ e T é fixo.

Com o objetivo de aplicar uma especificação do formalismo de Dubovitskii-Milyutin para problemas intervalares, vamos definir

$$Q_1 = \{(x,u) \in E : \dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)) \text{ q.s. em } [0,T],\ x(0) = x_0\} \tag{6}$$

e

$$Q_2 = \{(x,u) \in E : u(t) \in U \text{ q.s. em } [0,T]\}. \tag{7}$$

Desta forma, (PCOI) pode expresso como

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & J(x,u) = \displaystyle\int_0^T L(t,x(t),u(t))dt \\ \text{sobre} & (x,u) \in Q := Q_1 \cap Q_2. \end{array} \tag{8}$$

Seja $(x^*,u^*) \in Q$ um processo factível de (PCOI). Então, (x^*,u^*) é um *LU-processo ótimo fraco local* de (PCOI) se existe $\delta > 0$ tal que não existe $(x,u) \in Q$ com $\|x - x^*\|_{L_\infty} \le \delta$ e $J(x,u) <_{LU} J(x^*,u^*)$.

Seja $(x^*,u^*) \in Q$ um processo de referência. Diremos que as hipóteses básicas sobre os dados de (PCOI) valem em (x^*,u^*) se existe $\varepsilon > 0$ tal que

(H1) $L(t,\cdot,\cdot)$ é continuamente gH-diferenciável q.s. em $[0,T]$; existe uma função integrável k satisfazendo

$$d_H\big(L(t,x,u), L(t,y,v)\big) \le k(t)\|(x,u) - (y,v)\| \text{ q.s. em } [0,T] \tag{9}$$

para todos $(x,u),(y,v) \in (x^*(t),u^*(t)) + \varepsilon B$ q.s. em $[0,T]$; $\underline{L}(\cdot,x,u)$ e $\overline{L}(\cdot,x,u)$ são Lebesgue mensuráveis para todo $(x,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

(H2) $f(t,\cdot,\cdot)$ é continuamente diferenciável q.s. em $[0,T]$; $f(\cdot,x,u)$ é Lebesgue mensurável para todo $(x,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

(H3) Os gradientes abaixo existem e

$$\|(\nabla_x)_\sharp \underline{L}(t,x,u)\| + \|(\nabla_x)_\sharp \overline{L}(t,x,u)\| + \|(\nabla_u)_\sharp \underline{L}(t,x,u) + \|(\nabla_u)_\sharp \overline{L}(t,x,u)\| < c_L \text{ q.s. em } [0,T] \tag{10}$$

para todo $(x,u) \in (x^*(t),u^*(t)) + \varepsilon B$ q.s. em $[0,T]$, para alguma constante $c_L > 0$.

(H4) Existe uma constante $c_f > 0$ tal que

$$\|\nabla_x f(t,x,u)\| + \|\nabla_u f(t,x,u)\| < c_f \text{ q.s. em } [0,T] \tag{11}$$

para todo $(x,u) \in (x^*(t),u^*(t)) + \varepsilon B$ q.s. em $[0,T]$.

(H5) U é convexo e fechado em $\mathbb{R}^m$ com $\text{int}(U) \neq \emptyset$.

Como já mencionado acima, o princípio do máximo fraco será derivado de uma especificação do formalismo de Dubovitskii-Milyutin. Deste modo, faz-se necessário definir os seguintes conceitos.

(i) Um vetor (y, v) é uma direção de descida de $J(x, u)$ em (x^*, u^*) se existem uma vizinhança $N \subset E$ de (y, v), um escalar positivo ϵ^* e um intervalo $[\underline{\alpha}, \overline{\alpha}] <_{LU} [0, 0]$ tais que para todo $\epsilon \in (0, \epsilon^*)$ e todo $(\tilde{y}, \tilde{v}) \in N$, tem-se $J((x^*, u^*) + \epsilon(\tilde{y}, \tilde{v})) <_{LU} J(x^*, u^*) + \epsilon\,[\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]$. O conjunto de todas as direções de descida de $J(x, u)$ em (x^*, u^*) será denotado por $\mathcal{K}_y$. [3]

(ii) Um vetor (y, v) é uma direção tangente a Q_1 em (x^*, u^*) se existe $\epsilon^* > 0$ tal que, para todo $\epsilon \in (0, \epsilon^*)$, existe $(x_\epsilon, u_\epsilon) \in Q_1$ satisfazendo $(x_\epsilon, u_\epsilon) = (x^*, u^*) + \epsilon(y, v) + (r^1_\epsilon, r^2_\epsilon)$ com $\|(r^1_\epsilon, r^2_\epsilon)\|_E = o(\epsilon)$. O conjunto de todas as direções tangentes a Q_1 em (x^*, u^*) será denotado por $\mathcal{K}_k$.

(iii) Um vetor (y, v) é uma direção factível a Q_2 em (x^*, u^*) se existem uma vizinhança $N \subset E$ de (y, v) e um escalar positivo ϵ^* tal que para todo $\epsilon \in (0, \epsilon^*)$ e todo $(\tilde{y}, \tilde{v}) \in N$, $(x^*, u^*) + \epsilon(\tilde{y}, \tilde{v}) \in Q_2$. O conjunto de todas as direções factíveis a Q_2 em (x^*, u^*) será denotado por $\mathcal{K}_b$.

É fácil ver que os conjuntos $\mathcal{K}_y$, $\mathcal{K}_k$ e $\mathcal{K}_b$ são cones. Mais ainda, os cones $\mathcal{K}_y$ e $\mathcal{K}_b$ são abertos. Mais detalhes em [3, 7, 8]. As caracterizações dos cones de direções tangentes e factíveis podem ser encontradas na literatura. Já a caracterização do cone de direções de descida para o funcional integral J foi estabelecida recentemente em [7].

Proposição 3.1 (Villanueva [7]). *Suponha que vale (H1) em $(x^*, u^*) \in Q$. Então, o cone $\mathcal{K}_y$ de direções de descida de $J(x, u)$ em (x^*, u^*) é dado por*

$$\mathcal{K}_y = \mathcal{K}_0 := \left\{ (y, v) \in E : \int_0^T L'_{gH}((t, x^*(t), u^*(t)); (y(t), v(t)))dt <_{LU} [0, 0] \right\}. \tag{12}$$

Claramente, o cone $\mathcal{K}_y$ acima pode também ser caracterizado como $\mathcal{K}_y = \underline{\mathcal{K}}_0 \cap \overline{\mathcal{K}}_0$, onde

$$\underline{\mathcal{K}}_0 := \left\{ (y, v) \in E : \int_0^T \nabla_\sharp \underline{L}(t, x^*(t), u^*(t)) \cdot (y(t), v(t))dt < 0 \right\}, \tag{13}$$

$$\overline{\mathcal{K}}_0 := \left\{ (y, v) \in E : \int_0^T \nabla_\sharp \overline{L}(t, x^*(t), u^*(t)) \cdot (y(t), v(t))dt < 0 \right\}. \tag{14}$$

Proposição 3.2 (Girsanov [3]). *Suponha que valem (H2) e (H4) em $(x^*, u^*) \in Q$. Então, o cone $\mathcal{K}_k$ de direções tangentes a Q_1 em (x^*, u^*) é dado por*

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_k = \mathcal{K}_1 := \big\{ (y, v) \in E : \dot{y}(t) = {} & \nabla_x f(t, x^*(t), u^*(t))^\top y(t) \\ & + \nabla_u f(t, x^*(t), u^*(t))^\top v(t) \;\; q.s. \;\, em \; [0, T], \;\; y(0) = 0 \big\}. \end{aligned} \tag{15}$$

Proposição 3.3 (Girsanov [3]). *Suponha que vale (H5) em $(x^*, u^*) \in Q$. Então, o cone $\mathcal{K}_b$ de direções factíveis a Q_2 em (x^*, u^*) é dado por*

$$\mathcal{K}_b = \mathcal{K}_2 := \{ (y, v) \in E : (y, v) = \lambda[(x, u) - (x^*, u^*)], \;\; (x, u) \in \text{int}(Q_2), \;\; \lambda > 0 \}. \tag{16}$$

Pelas caracterizações acima, é fácil ver que os cones $\mathcal{K}_y$, $\mathcal{K}_k$ e $\mathcal{K}_b$ são convexos.

[3] Note que $\underline{\alpha}$ e $\overline{\alpha}$ dependem de J, (x^*, u^*), e (y, v).

4 O Princípio do Máximo Fraco

Nesta seção vamos enunciar os resultados principais do trabalho, que trazem condições necessárias de otimalidade para (PCOI).

Teorema 4.1. *Seja $(x^*, u^*) \in Q$ um LU-processo ótimo fraco local de (PCOI). Suponha que (H1)-(H5) valem em (x^*, u^*). Então, existem $\underline{\lambda} \geq 0$, $\overline{\lambda} \geq 0$, com $\underline{\lambda} + \overline{\lambda} = 1$, e $p : [0, T] \to \mathbb{R}^n$, satisfazendo*

$$\dot{p}(t) = \underline{\lambda}\,(\nabla_x)_\sharp \underline{L}(t, x^*(t), u^*(t)) + \overline{\lambda}\,(\nabla_x)_\sharp \overline{L}(t, x^*(t), u^*(t)) - \nabla_x f(t, x^*(t), u^*(t))^\top p(t) \tag{17}$$

quase sempre em $[0, T]$ com $p(T) = 0$. Além disso,

$$\Big(\underline{\lambda}\,(\nabla_u)_\sharp \underline{L}(t, x^*(t), u^*(t)) + \overline{\lambda}\,(\nabla_u)_\sharp \overline{L}(t, x^*(t), u^*(t)) - \nabla_u f(t, x^*(t), u^*(t))^\top p(t)\Big)^\top \big(u - u^*(t)\big) \geq 0 \tag{18}$$

para todo $u \in U$ quase sempre em $[0, T]$.

Demonstração. É fácil ver que o fato de (x^*, u^*) ser um LU-processo ótimo fraco local implica em $\underline{\mathcal{K}}_0 \cap \overline{\mathcal{K}}_0 \cap \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 = \emptyset$. Pelo Lema de Dubovitskii-Milyutin (Lema 5.11, página 37, Girsanov [3]), segue que existem funcionais lineares $\underline{\phi}_0 \in \underline{\mathcal{K}}_0^*$, $\overline{\phi}_0 \in \overline{\mathcal{K}}_0^*$, $\phi_1 \in \mathcal{K}_1^*$ e $\phi_2 \in \mathcal{K}_2^*$, nem todos nulos, tais que

$$\underline{\phi}_0(y, v) + \overline{\phi}_0(y, v) + \phi_1(y, v) + \phi_2(y, v) = 0 \;\forall (y, v) \in E. \tag{19}$$

Vamos supor inicialmente que $\underline{\mathcal{K}}_0 \neq \emptyset$ e $\overline{\mathcal{K}}_0 \neq \emptyset$. Pelas caracterizações de cones duais dadas no Capítulo 10 de Girsanov [3], segue que

$$\underline{\phi}_0(y, v) = -\underline{\lambda} \int_0^T \big[(\nabla_x)_\sharp \underline{L}(t, x^*(t), u^*(t))^\top y(t) + (\nabla_u)_\sharp \underline{L}(t, x^*(t), u^*(t))^\top v(t)\big] dt,\; \underline{\lambda} \geq 0, \tag{20}$$

$$\overline{\phi}_0(y, v) = -\overline{\lambda} \int_0^T \big[(\nabla_x)_\sharp \overline{L}(t, x^*(t), u^*(t))^\top y(t) + (\nabla_u)_\sharp \overline{L}(t, x^*(t), u^*(t))^\top v(t)\big] dt,\; \overline{\lambda} \geq 0, \tag{21}$$

$$\phi_1(y, v) = 0 \;\forall (y, v) \in \mathcal{K}_1, \tag{22}$$

$$\phi_2(y, v) = \tilde{\phi}_2(v),\; \tilde{\phi}_2(v) \geq \tilde{\phi}_2(u^*) \;\forall v \in \tilde{Q}_2 := \{v \in L_\infty([0, T]; \mathbb{R}^m) : v(t) \in U \text{ q.s. em } [0, T]\}. \tag{23}$$

Seja $(y, v) \in \mathcal{K}_1$. De (19), temos

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_2(v) \;=\; & \underline{\lambda} \int_0^T (\nabla_u)_\sharp \underline{L}(t, x^*(t), u^*(t))^\top v(t) dt + \overline{\lambda} \int_0^T (\nabla_u)_\sharp \overline{L}(t, x^*(t), u^*(t))^T v(t) dt \\ & + \underline{\lambda} \int_0^T (\nabla_x)_\sharp \underline{L}(t, x^*(t), u^*(t))^\top y(t) dt + \overline{\lambda} \int_0^T (\nabla_x)_\sharp \overline{L}(t, x^*(t), u^*(t))^T y(t) dt. \end{aligned} \tag{24}$$

Seja $p(t)$ uma solução de (17) com $p(T) = 0$. Multiplicando a equação (17) por $y(t)$ e integrando em seguida, obtemos

$$\begin{aligned} & \underline{\lambda} \int_0^T (\nabla_x)_\sharp \underline{L}(t, x^*(t), u^*(t))^\top y(t) dt + \overline{\lambda} \int_0^T (\nabla_x)_\sharp \overline{L}(t, x^*(t), u^*(t))^\top y(t) dt \\ & = \int_0^T \Big(\dot{p}(t) + \nabla_x f(t, x^*(t), u^*(t))^\top p(t)\Big)^\top y(t) dt \\ & = p(t)^\top y(t)\big|_0^T - \int_0^T p(t)^\top \dot{y}(t) dt + \int_0^T p(t)^\top \nabla_x f(t, x^*(t), u^*(t)) y(t) dt \\ & = -\int_0^T \Big(\nabla_u f(t, x^*(t), u^*(t))^\top p(t)\Big)^\top v(t) dt, \end{aligned} \tag{25}$$

onde usamos integração por partes na segunda igualdade e o fato de $(y, v) \in \mathcal{K}_1$ na última. Deste modo, podemos escrever

$$\tilde{\phi}_2(v) = \int_0^T \Big(\underline{\lambda}(\nabla_u)_\sharp \underline{L}(t, x^*(t), u^*(t)) + \overline{\lambda}(\nabla_u)_\sharp \overline{L}(t, x^*(t), u^*(t)) - \nabla_u f(t, x^*(t), u^*(t))^\top p(t)\Big)^\top v(t) dt. \tag{26}$$

Sabendo que $\tilde{\phi}_2$ é funcional suporte a $\tilde{Q}_2$ em u^*, pelo Exemplo 10.5 na página 76 de Girsanov [3], segue que

$$\Big(\underline{\lambda}(\nabla_u)_\sharp \underline{L}(t, x^*(t), u^*(t)) + \overline{\lambda}(\nabla_u)_\sharp \overline{L}(t, x^*(t), u^*(t)) - \nabla_u f(t, x^*(t), u^*(t))^\top p(t)\Big)^\top \big(u - u^*(t)\big) \geq 0 \tag{27}$$

para todo $u \in U$, quase sempre em $t \in [0, T]$. Resta mostrar que $\underline{\lambda} + \overline{\lambda} = 1$. No entanto, se $\underline{\lambda} = \overline{\lambda} = 0$, teríamos $\underline{\phi}_0 = \overline{\phi}_0 = \phi_1 = \phi_2 = 0$, contradizendo o fato de não se anularem simultaneamente.

Por fim, temos que analisar os casos $\underline{\mathcal{K}}_0 = \emptyset$ e $\overline{\mathcal{K}}_0 = \emptyset$. No primeiro caso, o resultado segue facilmente tomando $\underline{\lambda} = 1$, $\overline{\lambda} = 0$ e uma solução arbitrária de (17). De fato, se $\underline{\mathcal{K}}_0 = \emptyset$,

$$\int_0^T \big[(\nabla_x)_\sharp \underline{L}(t, x^*(t), u^*(t))^\top y(t) + (\nabla_u)_\sharp \underline{L}(t, x^*(t), u^*(t))^\top v(t)\big] dt = 0 \ \forall (y, v) \in E. \tag{28}$$

Por outro lado, dos cálculos acima com $\underline{\lambda} = 1$ e $\overline{\lambda} = 0$, temos

$$\int_0^T (\nabla_x)_\sharp \underline{L}(t, x^*(t), u^*(t))^\top y(t) dt = -\int_0^T \Big(\nabla_u f(t, x^*(t), u^*(t))^\top p(t)\Big)^\top v(t) dt. \tag{29}$$

Subistituindo na última igualdade, obtemos

$$\int_0^T \Big((\nabla_u)_\sharp \underline{L}(t, x^*(t), u^*(t)) - \nabla_u f(t, x^*(t), u^*(t))^\top p(t)\Big)^\top v(t) dt = 0 \tag{30}$$

para todo $v \in L_\infty([0, T]; \mathbb{R}^m)$, de modo que

$$(\nabla_u)_\sharp \underline{L}(t, x^*(t), u^*(t)) - \nabla_u f(t, x^*(t), u^*(t))^\top p(t) = 0 \text{ q.s. em } [0, T]. \tag{31}$$

O segundo caso é similar. $\square$

A seguir, enunciamos o princípio do máximo fraco para (PCOI), cuja demonstração é derivada do resultado anterior e pode ser encontrada em Villanueva [7]. As condições necessárias de otimalidade estão expressas em termos do gH-gradiente da função objetivo intervalar.

Teorema 4.2. *Seja $(x^*, u^*) \in Q$ um LU-processo ótimo fraco local de (PCOI). Suponha que (H1)-(H5) valem em (x^*, u^*). Então, existem uma função contínua $p : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ e um vetor $y \in \mathbb{R}^m$ satisfazendo*

$$\dot{p}(t) \in (\nabla_x)_{gH} L(t, x^*(t), u^*(t)) \oplus \Big(-\nabla_x f(t, x^*(t), u^*(t))^\top p(t)\Big) \ \text{q.s. em } [0, T], \ p(T) = 0, \tag{32}$$

$$y \in (\nabla_u)_{gH} L(t, x^*(t), u^*(t)) \oplus \Big(-\nabla_u f(t, x^*(t), u^*(t))^\top p(t)\Big) \ \text{q.s. em } [0, T], \tag{33}$$

$$y^\top \big(u - u^*(t)\big) \geq 0 \ \forall u \in U \ \text{q.s. em } [0, T]. \tag{34}$$

Finalizamos o trabalho com um exemplo acadêmico.

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0496

Exemplo 4.1.

$$\begin{array}{ll} \textit{Minimizar} & J(x,u) = \frac{1}{2}\int_0^1 x[0.9, 1.1]x\,dt \\ \textit{sujeito a} & \dot{x}(t) = [u(t)]^2 \textit{ q.s. em } [0,1],\ x(0) = 1, \\ & u \in U = [-1, 0] \textit{ q.s. em } [0,1]. \end{array} \tag{35}$$

É fácil ver que $(x^*(t), u^*(t)) \equiv (1, 0)$ *é um LU-processo ótimo fraco local do problema. Tomando* $p : [0,1] \to \mathbb{R}$ *definida por* $p(t) \equiv t - 1$*, temos* $p(1) = 0$ *e*

$$\dot{p}(t) = 1 \in [0.9, 1.1] = [0.9x^*(t), 1.1x^*(t)] \oplus (-0p(t)) \textit{ q.s. em } [0,1]. \tag{36}$$

Tomando $y = 0 \in \mathbb{R}$*, temos*

$$y = 0 \in [0, 0] = [0, 0] \oplus (-2u^*(t)p(t)) \textit{ q.s. em } [0,1], \tag{37}$$

$$y(u - u^*(t)) = 0(u - 0) \geq 0 \ \forall u \in U = [-1, 0]. \tag{38}$$

Vemos que as condições necessárias dadas no Teorema 4.2 são verificadas.

Agradecimentos

Valeriano A. de Oliveira agradece o apoio da FAPESP, processo 2022/16005-0.

Referências

[1] M. R. Bahrmand, H. Khaloozadeh e P. R. Ardabili. "A minimum principle for stochastic optimal control problem with interval cost function". Em: **Taiwanese J. Math.** 27.2 (2023), pp. 401–416. DOI: 10.11650/tjm/221102.

[2] J. R. Campos, E. Assunção, G. N. Silva, W. A. Lodwick e M. C. M. Teixeira. "Discrete-time interval optimal control problem". Em: **Internat. J. Control** 92.8 (2019), pp. 1778–1784. DOI: 10.1080/00207179.2017.1410575.

[3] I. V. Girsanov. **Lectures on Mathematical Theory of Extremum Problems**. Vol. 67. Lecture Notes in Econom. Math. Systems. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972, pp. iv+136.

[4] U. Leal, W. Lodwick, G. Silva e G. G. Maqui-Huamán. "Interval optimal control for uncertain problems". Em: **Fuzzy Sets and Systems** 402 (2021), pp. 142–154. DOI: 10.1016/j.fss.2019.10.002.

[5] L. Li e J. Zhang. "Sufficient conditions for interval-valued optimal control problems in admissible orders". Em: **Soft Comput.** 28.4 (2024), pp. 2843–2850. DOI: 10.1007/s00500-023-09563-1.

[6] R. Navid. **Interval Analysis: Application in the Optimal Control Problems**. 1st. ed. New Jersey: Wiley-IEEE Press, 2023. ISBN: 978-1-394-19097-3. DOI: 10.1002/9781394191000.

[7] F. R. Villanueva. "Contributions in Interval Optimization and Interval Optimal Control". Tese de doutorado. Universidade Estadual Paulista (Unesp), São José do Rio Preto, 2020.

[8] F. R. Villanueva e V. A. de Oliveira. "Necessary optimality conditions for interval optimization problems with functional and abstract constraints". Em: **J. Optim. Theory Appl.** 194.3 (2022), pp. 896–923. DOI: 10.1007/s10957-022-02055-6.

[9] C. Yang e Y. Xia. "Interval Uncertainty-Oriented Optimal Control Method for Spacecraft Attitude Control". Em: **IEEE Trans. Aerospace and Electron. Systems** 59.5 (2023), pp. 5460–5471. DOI: 10.1109/TAES.2023.3257777.

