Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Seleção de Carteiras de Investimento: um Modelo a Quatro Momentos

Patricia R. Martins[1] Patrícia N. Silva[2] Carlos Frederico Vasconcellos[3]
PPG Ciências Computacionais e Modelagem Matemática, IME/UERJ, Rio de Janeiro, RJ

Resumo. Um dos problemas fundamentais em finanças é a seleção de carteiras de investimento. A teoria moderna de portfólio nasce com a resolução do problema de seleção de carteiras, em um contexto de distribuição normal, considerando os dois primeiros momentos da distribuição dos retornos dos ativos: o vetor de retornos e a matriz de covariâncias. Estudos posteriores apontaram inconsistências no modelo de média-variância, uma vez que a distribuição de ativos raramente retorna seguindo um padrão de distribuição normal e indicaram a necessidade de incorporação de momentos de ordem superior. Neste trabalho, apresenta-se um modelo a quatro momentos de seleção de carteiras de investimentos. São indicadas as quatro possíveis abordagens do problema de otimização com três restrições, associadas a este modelo. Para simulações numéricas, foi selecionada uma amostra de nove ativos presentes no mercado brasileiro de ações. Um dos portfólios analisados nos testes numéricos é discutido. Os resultados sugerem vantagens no modelo obtido pela incorporação da curtose.

Palavras-chave. Seleção de Carteiras de Investimento, Momentos de Ordem Superior, Curtose

1 Introdução

O problema de seleção de portfólios foi resolvido por Markowitz [6], em um contexto de distribuição normal, considerando os dois primeiros momentos da distribuição dos retornos dos ativos: o vetor de retornos e a matriz de covariâncias. A solução proposta para este problema, desde então é fonte de pesquisa e base de estudos em diversos trabalhos na área econômico-financeira. O processo de seleção de uma carteira de investimentos, segundo Markowitz, começa pela observação, que irá definir as crenças sobre futuras performances dos ativos, e é a partir de crenças relevantes sobre futuras performances, que será realizada a escolha da carteira. Para Markowitz, os principais fatores a serem considerados na observação dos ativos são: o risco e o retorno, onde o retorno esperado da carteira é definido como a média dos retornos médios dos ativos, a ser ponderada pelos pesos, e o risco é mensurado como o desvio dos resultados esperados em relação à sua média, ou seja, é a variância dos retornos dos ativos, uma medida de dispersão ligada ao grau de incerteza, e que caracteriza a volatilidade associada ao retorno esperado.

No entanto, estudos posteriores apontaram inconsistências no modelo de média-variância, uma vez que a distribuição de ativos raramente retorna seguindo um padrão de distribuição normal. Trabalhos como Arditti e Levy [1] e Kraus, Alan e Litzenberger [5] defendem a relevância dos momentos de ordem superior, fora de um contexto de distribuição normal, entendendo-se que a forma da distribuição é caracterizada pelos momentos centrados. É visto que o interesse pela otimização de um portfólio onde figuram momentos de ordem superior à ordem dois dos retornos dos ativos que compõem a carteira vem se renovando nos últimos anos, e a influência desses momentos

[1] patricia.martins@pos.ime.uerj.br
[2] nunes@ime.uerj.br
[3] cfredvasc@ime.uerj.br

DOI: 10.5540/03.2025.011.01.0474 © 2025 SBMAC

tem sido amplamente investigada, dada a possibilidade de se obter uma melhor aproximação para a função utilidade. Estudos como Athayde e Flôres [2], Barone-Adesi [3], Harvey e Siddique [4] também argumentam sobre a importância dos momentos de ordem superior para a escolha de uma carteira mais eficiente. Scott e Horvath [8] fornecem um suporte formal para a aplicação desta teoria, mostrando que, no contexto da otimização, para maximizar a função utilidade, os momentos ímpares devem ser maximizados, enquanto que os momentos pares devem ser minimizados, o que se traduz na satisfação do investidor.

Em [7], Martins *et al.* verificaram que a maximização da assimetria, terceiro momento centrado, resultou em carteiras mais eficientes do que as obtidas pelo modelo média-variância. Neste trabalho, foi investigada a relevância em se considerar a curtose, quarto momento centrado, na seleção de carteiras de investimento, tendo em vista a importância deste momento, que mede a concentração ou dispersão dos valores em relação às medidas de tendência central. Seguindo as preferências como em Scott e Horvath [8] – investidores são avessos à variância assim como também são avessos à curtose em sua carteira – a curtose, ao ser incorporada à seleção dando origem a um modelo a quatro momentos, será minimizada por se tratar de um momento par da distribuição dos retornos dos ativos. Apresenta-se também uma simulação numérica do modelo a quatro momentos considerado. O modelo considera os quatro primeiros momentos de distribuição dos ativos presentes na carteira, onde três dos momentos serão fixados para a otimização do quarto, tendo em mente as preferências do investidor como em [8], de forma que os momentos pares serão minimizados e os ímpares maximizados. Para simulação, foi selecionada uma amostra de nove ativos presentes no mercado brasileiro de ações.

2 Modelo a quatro momentos

A seleção de carteiras eficientes a partir dos quatro primeiros momentos da distribuição dos retornos de seus ativos, pode ser vista como um problema de otimização em que se minimiza um momento de ordem par ou maximiza um momento de ordem ímpar, fixando os outros três parâmetros. Buscam-se carteiras eficientes para o caso de n ativos de risco mais um ativo livre de risco, permitindo vendas a descoberto, sem que nenhuma restrição seja imposta aos pesos da carteira. São considerados os quatro primeiros momentos de distribuição verificados para os n ativos de risco. Deste modo seria possível obter a carteira ótima a partir de quatro perspectivas distintas, dando origem a quatro possíveis problemas de otimização:

$$\begin{array}{cccc}
\text{Retorno máximo:} & \text{Variância mínima:} & \text{Assimetria máxima:} & \text{Curtose mínima:} \\[2mm]
\left\{\begin{array}{l} \max\ \alpha^t x \\ \alpha^t M_2 \alpha = \sigma_{p^2} \\ \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} = \sigma_{p^3} \\ \alpha^t M_4 \alpha^{\otimes 3} = \sigma_{p^4} \end{array}\right. &
\left\{\begin{array}{l} \min\ \alpha^t M_2 \alpha \\ \alpha^t x = R \\ \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} = \sigma_{p^3} \\ \alpha^t M_4 \alpha^{\otimes 3} = \sigma_{p^4} \end{array}\right. &
\left\{\begin{array}{l} \max\ \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} \\ \alpha^t x = R \\ \alpha^t M_2 \alpha = \sigma_{p^2} \\ \alpha^t M_4 \alpha^{\otimes 3} = \sigma_{p^4} \end{array}\right. &
\left\{\begin{array}{l} \min\ \alpha^t M_4 \alpha^{\otimes 3} \\ \alpha^t x = R \\ \alpha^t M_2 \alpha = \sigma_{p^2} \\ \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} = \sigma_{p^3} \end{array}\right.
\end{array}$$

onde M_1, M_2, M_3 e M_4 são as matrizes que contêm os retornos médios, covariâncias, co-assimetrias e co-curtoses dos n ativos de risco, $E(r_p)$ é um retorno esperado fixado, r_f a taxa de retorno livre de risco, $\otimes$ denota o produto de Kronecker e $\alpha^t M_p(\alpha \otimes \cdots \otimes \alpha) = \alpha^t M_p \alpha^{\otimes(p-1)}$ denota o p-ésimo momento. Denotam-se $R = E(r_p) - r_f$ e $x = M_1 - [1]r_f$, onde R é o retorno excedente da carteira e $[1]$ é um vetor cujas componentes são iguais a 1. Observe que, considerados os ativos com e sem risco, a soma dos pesos da carteira é igual a 1. Resultados de dualidade entre esses problemas, permitem considerar qualquer um desses quatro problemas de otimização. Em cada caso, elege-se um dos quatro momentos como função objetivo e os três momentos restantes funcionam como restrições. O momento é maximizado, se ele for de ordem ímpar e minimizado, se par. Se é tomado, por exemplo, o quarto momento centrado, aqui chamado curtose, como função objetivo,

 © 2025 SBMAC

obtém-se um problema de otimização com três restrições, dadas pela imposição dos três primeiros momentos que irão definir o conjunto admissível onde o quarto momento será minimizado, por se tratar de um momento par da distribuição. É claro que, para uma mesma variância, quanto menor for o quarto momento centrado de uma distribuição, menor será seu coeficiente de curtose, dado que o coeficiente de curtose é definido como a razão entre o quarto momento central e o desvio padrão elevado à quarta potência: $\sigma_{p^4}/\sigma_{p^2}^2$. Com isso entende-se que, segundo Scott e Horvath [8], o investidor tem preferência pelas distribuições platicúrticas, cujo coeficiente de curtose é menor que 3, às leptocúrticas, em que esse coeficiente é maior que 3.

3 Simulação numérica para o modelo a quatro momentos

Foram feitas simulações numéricas do modelo a quatro momentos momentos de minimização da curtose com o objetivo de obter *insights* sobre a relevância em se considerar o quarto momento na seleção de carteiras e a eficiência do modelo a quatro momentos. Os dados sobre os fundos de investimento foram obtidos através da plataforma da corretora brasileira de valores, corretora XP[4], no período de janeiro a dezembro 2017, Tabela 1. Este período foi definido com o objetivo de minimizar a influência de eventos externos que poderiam alterar a volatilidade da carteira, evitando períodos de conturbação político social. Uma vez que o método proposto demanda por um ativo sem risco, optou-se pela poupança, tendo a taxa de retorno r_f, 0.5% para rendimento mensal, ocorrido no mês de dezembro de 2017.

Tabela 1: Discriminação dos ativos, classificação e risco segundo a corretora XP.

ATIVOS: Fundos de investimentos	Classificação	Avaliação de Risco (0-100)
XP Corporate Plus FIC FIM CP	Multimercado	26
XP Debêntures Incentivadas CP		10
Kinea Chronos FIM		6
Selection RF Light FIC FI CP LP	Renda Fixa	6
IP Value Hedge FIC	Ações	15
Indie FIC FIA		39
Kiron FIC FIA	Renda Variável Long Only Livre	41
Leblon Ações FIC FIA		41
Alaska Black FIC FIA - BDR Nível I		68

Para todos os ativos, foram obtidas as matrizes M_1, M_2, M_3 e M_4, das médias mensais, co-variâncias, co-assimetrias e co-curtoses, respectivamente. Serão apresentados os resultados obtidos para a combinação dos Ativos 2, 6 e 8. A escolha desse trio deveu-se à assimetria negativa observada no Ativo 6 e à forma leptocúrtica, verificada para o Ativo 4, sendo todos considerados ativos de risco, e adotando como antes a taxa $r_f = 0.5$ para o ativo sem risco. Resolveu-se o seguinte problema de minimização da curtose:

$$\begin{cases} \min \alpha^t M_4 \alpha^{\otimes 3} \\ \alpha^t x = R \\ \alpha^t M_2 \alpha = \sigma_{p^2} \\ \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} = \sigma_{p^3} \end{cases}.$$

[4] `https://www.xpi.com.br/investimentos/fundos-de-investimento/lista/\#/`.

 © 2025 SBMAC

Optou-se por definir o retorno inicial R a partir da média dos retornos médios excedentes, ou seja, a média dos valores resultantes da subtração do retorno médio de cada ativo pela taxa do ativo livre de risco $r_f = 0.5$. Em seguida a variância mínima σ_{p^2M} é obtida para R pela aplicação do modelo Média-Variância. A carteira de variância mínima para R, segundo o modelo Média-Variância de Markowitz, foi obtida pela utilização do método Programação Quadrática Linear (SQP), que resolve problemas de otimização restrita para uma função não linear sujeita uma ou mais restrições. A utilização deste método foi feita recorrendo ao programa Octave, e não necessitou de implementação uma vez que faz parte das rotinas implementadas pelo programa Octave. Os ponderadores, componentes do vetor α_M, obtidos através do modelo Média-Variância para R, definem a carteira ótima, e a variância mínima σ_{p^2M} é calculada a partir da carteira ótima α_M, não havendo outra configuração possível para os ponderadores que forneça menor variância com o mesmo retorno fixado.

Para a combinação de Ativos 2, 4 e 6, foram calculados os quatro primeiros momentos para a carteira de Markowitz α_M:

$$\alpha_M = \frac{R}{A_0} M_2^{-1} x = \begin{bmatrix} -0.3985 \\ 0.9962 \\ 0.1806 \end{bmatrix},$$

dando origem a respectiva quádrupla dos momentos para a carteira de variância mínima de Markowitz:

$$Q_M = (1.3544, -0.3985, 0.558, 3.953),$$

e apresentados na primeira linha da Tabela 2. Na mesma tabela, são apresentados os quatro momentos calculados para as quatro carteiras de assimetria máxima, obtidas para a combinação dos Ativos 2, 4, 6 em [7], a partir do aumento da variância em 5%, 10%, 15% e 20% da variância de Markowitz, de modo a formar quádruplas dos momentos para as respectivas carteiras de assimetria máxima.

$$\begin{aligned} Q_{5\%} &= (1.3544, 1.394, 1.214, 5.305) \\ Q_{10\%} &= (1.3544, 1.460, 1.565, 6.289) \\ Q_{15\%} &= (1.3544, 1.526, 1.868, 7.254) \\ Q_{20\%} &= (1.3544, 1.593, 2.148, 8.224) \end{aligned}$$

Tabela 2: Resultados no modelo a três momentos para a combinação dos Ativos 2, 4 e 6

Modelo a três momentos								
Combinação	Retorno excedente fixado	Variância fixada (Markowitz, e aumentada 5, 10, 15 e 20%)	Carteira de Assimetria máxima (ponderadores)	Assimetria máxima	Curtose calculada	Coef. de Variação	Coef. de Assimetria	Coef. de Curtose
Ativo 2 Ativo 4 Ativo 6	1.3544	1.327	-0.3985 0.9962 0.1806	0.558	3.953	0.85	0.36	2.24
Ativo 2 Ativo 4 Ativo 6	1.3544	1.394	-0.6200 1.1723 0.6229	1.214	5.305	0.87	0.74	2.73
Ativo 2 Ativo 4 Ativo 6	1.3544	1.460	-0.5702 1.2445 0.5642	1.565	6.289	0.89	0.89	2.95
Ativo 2 Ativo 4 Ativo 6	1.3544	1.526	-0.5319 -1.2997 0.5191	1.868	7.254	0.91	0.99	3.11
Ativo 2 Ativo 4 Ativo 6	1.3544	1.593	-0.4996 1.3463 0.4812	2.148	8.224	0.93	1.07	3.24

 © 2025 SBMAC

Para as quádruplas obtidas nesta combinação de ativos, os aumentos de 5%, 10%, 15% e 20% na variância também ocasionaram aumentos nas respectivas curtoses. Os coeficientes de curtose, 2.24, 2.73, 2.95, 3.11, 3.24, calculados para a carteira de Markowitz, e para as carteiras de assimetria máxima obtidas pelo acréscimo de 5%, 10%, 15% e 20% da variância de Markowitz, respectivamente, também aumentaram a cada acréscimo da variância. Com isso, observou-se que a carteira de Markowitz obtida pelo modelo Média-Variância, para aquele retorno específico, apresentava a forma platicúrtica desejada, mas à medida que foi aplicado o modelo a três momentos, as carteiras foram apresentando coeficientes de curtose cada vez maiores até atingirem a forma leptocúrtica nas carteiras de assimetria máxima para aumentos de 15% e 20% na variância. Desta forma, para a combinação dos Ativos 2, 4 e 6, optou-se pelas triplas de assimetria máxima obtidas pelo aumento de variância a 15% e 20% para simulação numérica a quatro momentos. Foram utilizadas, inicialmente as próprias triplas $T_{15\%}$ e $T_{20\%}$ na composição do conjunto de restrições que definem o conjunto admissível para cada problema a quatro momentos:

$$T_{15\%} \rightarrow \begin{cases} \min \alpha^t M_4 \alpha^{\otimes 3} \\ \alpha^t x = 1.3544 \\ \alpha^t M_2 \alpha = 1.526 \\ \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} = 1.868 \end{cases} \quad \text{e} \quad T_{20\%} \rightarrow \begin{cases} \min \alpha^t M_4 \alpha^{\otimes 3} \\ \alpha^t x = 1.3544 \\ \alpha^t M_2 \alpha = 1.593 \\ \alpha^t M_3 \alpha^{\otimes 2} = 2.148 \end{cases},$$

obtendo para cada tripla de assimetria máxima fixada, uma carteira ótima de curtose mínima α^*:

$$\alpha^*_{(15)} = \begin{bmatrix} -0.5319 \\ 1.2997 \\ 0.5191 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \alpha^*_{(20)} = \begin{bmatrix} -0.4996 \\ 1.3463 \\ 0.4812 \end{bmatrix},$$

e seus respectivos valores de cutose mínima que coincidiram com os valores obtidos para a carteira de assimetria máxima no modelo a três momentos.

Tabela 3: Resultados no modelo a quatro momentos para a combinação dos Ativos 2, 4 e 6

Modelo a quatro momentos								
Combinação	Retorno excedente fixado	Variância fixada (aumentada 15 e 20%)	Assimetria fixada (reduzida 5, 10, 15, 20%)	Carteira de curtose mínima (ponderadores)	Curtose mínima	Coef. de Variação	Coef. de Assimetria	Coef. de Curtose
Ativo 2 Ativo 4 Ativo 6	1.3544	1.5262	1.775	0.142551 1.239861 0.018005	6.905	0.91	0.94	2.96
Ativo 2 Ativo 4 Ativo 6	1.3544	1.5262	1.681	0.152981 1.195728 0.033206	6.679	0.91	0.89	2.87
Ativo 2 Ativo 4 Ativo 6	1.3544	1.5262	1.588	0.155334 1.158686 0.046805	6.483	0.91	0.84	2.78
Ativo 2 Ativo 4 Ativo 6	1.3544	1.5262	1.495	0.153127 1.125183 0.059674	6.304	0.91	0.79	2.71
Ativo 2 Ativo 4 Ativo 6	1.3544	1.5925	2.040	0.224570 1.282000 -0.008596	7.777	0.93	1.02	3.07
Ativo 2 Ativo 4 Ativo 6	1.3544	1.5925	1.933	0.237080 1.234000 0.007779	7.494	0.93	0.96	2.96
Ativo 2 Ativo 4 Ativo 6	1.3544	1.5925	1.825	0.240828 1.194008 0.022314	7.250	0.93	0.91	2.86
Ativo 2 Ativo 4 Ativo 6	1.3544	1.5925	1.718	0.239714 1.157930 0.036006	7.030	0.93	0.85	2.77

 © 2025 SBMAC

Na Tabela 3 são apresentados os resultados para a aplicação do modelo a quatro momentos, quando o conjunto admissível no problema de otimização é composto, como antes, a partir das triplas de assimetria máxima $T_{15\%}$ e $T_{20\%}$, reduzindo sistematicamente o valor da assimetria em 5%, 10%, 15%, 20%, e mantendo os valores de retorno e variância aumentada em 15% e 20% da variância de Markowitz.

4 Considerações Finais

Na combinação de Ativos 2, 4, 6, o coeficiente de curtose da carteira de Markowitz se reportava à forma platicúrtica, mas após a aplicação do modelo a três momentos o coeficiente apresentou um aumento muito expressivo alterando a forma da distribuição para leptocúrtica a partir da terceira iteração. Os resultados apresentados ilustram que a aplicação do modelo a quatro momentos possibilitou um maior controle da curtose, indicando a relevância do modelo a quatro momentos e sugerindo uma maior eficiência quanto maior o número de momentos considerados no problema. Além dos elementos apontados anteriormente, cabe destacar que a literatura da área indica a incorporação da curtose para investidores avessos ao risco. Ao controlar melhor a assimetria e a curtose, a carteira obtida no modelo a quatro momentos pode reduzir a probabilidade de obtenção de grandes retornos negativos.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio da FAPERJ, processos E26/210.341/2018 e E26/010.001143/2019.

Referências

[1] F. D. Arditti e H. Levy. "Portfolio efficiency analysis in three moments: The multiperiod case". Em: **Journal of Finance** 30 (1975), pp. 797–809.

[2] G. M. Athayde e R. G. FlÔres. "Finding a maximum skewness portfolio–a general solution to three-moments portfolio choice". Em: **Journal of Economic Dynamics and Control** 28 (2004), pp. 1335–1352.

[3] G. Barone-Adesi. "Arbitrage equilibrium with skewed asset returns". Em: **Journal of Financial and Quantitative Analysis** 20 (1985), pp. 299–313. ISSN: 1756-6916.

[4] C. R. Harvey e A. Siddique. "Conditional skewness in asset pricing tests". Em: **The Journal of Finance** 55 (2000), pp. 1263–1295.

[5] A. Kraus e R. H. Litzenberger. "Skewness preference and the valuation of risk assets". Em: **The Journal of Finance** 31 (1976), pp. 1085–1100.

[6] H. Markowitz. "Portfolio selection". Em: **The Journal of Finance** 7 (1952), pp. 77–91.

[7] P. R. Martins, P. N. Silva, C. F. Vasconcellos e R. S. Lanzillotti. "Analysis of a portfolio selection model at three-moments". Em: **Observatório De La Economía Latinoamericana** 22 (2024), e3216.

[8] R. C. Scott e P. A. Horvath. "On the direction of preference for moments of higher order than the variance". Em: **The Journal of Finance** 35 (1980), pp. 915–919.

 © 2025 SBMAC